О равновесии Эджворта для многорегиональной экономической системы*

В.А. Васильев
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
vasilev@math.nsc.ru

ПРЕЗЕНТАЦИЯ

*Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН "Развитие теории, методологии и прикладных экономико-математических исследований"и Российского фонда фундаментальных исследований, № 10-06-00168а.

$\star$

1 Модель $\mathcal{M}$

Модель экономического взаимодействия регионов из [2]:

$$\mathcal{M} =< R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R} >,$$

$R = \{1, \ldots, r\}$ - множество регионов;

A^s - прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$;

G^s и H^s - прямоугольные матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$;

b^s - вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$;

d^s - вектор-столбец размерности n_s - затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

$\star$

Ресурсно-технологические возможности Z_s региона s (планы региона $s \in R$):

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \geq 0 \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\},$$

$x^s = (x_i^s)_{i=1}^{l_s}$, $u^s = (u_j^s)_{j=1}^{n}$, $v^s = (v_j^s)_{j=1}^{n}$ -
объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно,

$\lambda_s \in \mathbb{R}_+$ - степень достиж. целей регион. развития для $s \in R$.

Целевые функции регионов $s \in R$:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R.$$

Сбалансированные планы модели $\mathcal{M}$:

$$Z_{\mathcal{M}}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in R} \in \prod_{s \in R} Z_s \mid \sum_{s \in R} u^s \geq \sum_{s \in R} v^s\}.$$

$\star$

Строго автаркические планы регионов $s \in R$:

$$Z^0_{\mathcal{M}}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\}, \quad s \in R.$$

Строго автаркический регион s:

$$Z^0_{\mathcal{M}}(s) \neq \emptyset.$$

Ненасыщенный регион s (ниже используется сокращение $\widehat{Z}_s := \mathrm{Pr}_{Z_s} Z_{\mathcal{M}}(R)$):

$$\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{z^s \in \widehat{Z}_s} t_s(z^s).$$

Р.Т.В.- ограниченный регион s:

$$||z^s|| \leq K_s \quad \text{для всех} \quad z^s \in Z_s.$$

$\star$

2 Равновесие Вальраса

Вальрасовские планы

Определение 1. *План $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ - вальрас. равновесие $\mathcal{M}$, если $\exists$ вектор цен $0 \neq \bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ такой, что*

$$\bar{p} \cdot \bar{u}^s \geq \bar{p} \cdot \bar{v}^s, \quad s \in R,$$

и при этом $\forall z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, s \in R$, верна импликация

$$\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s.$$

Совокупность вальрас. равновесий $\mathcal{M}$ обозначаем через $W(\mathcal{M})$.

Итак, планы $\bar{z}^s = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)$ образуют вальрасовское равновесие модели $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда они сбалансированы (т.е. системный план $(\bar{z}^s)_{s \in R}$ принадлежит $Z_{\mathcal{M}}(R)$), и при некоторых ненулевых ценах $\bar{p} \in \mathbb{R}^n_+$ планы $\bar{z}^s$ доставляют максимальное значение целевым функциям t_s на **бюджетных множествах**

$$B_s(\bar{p}) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid \bar{p} \cdot u^s \geq \bar{p} \cdot v^s\}, \quad s \in R.$$

$\star$

3 Нечеткое ядро

Множество *нечетких коалиций*:

$$\sigma_F := \{ \ f = (f_1, \dots, f_r) \mid f \neq 0, \ f_s \in [0,1], \ s \in R\}$$

$R(f) := \{s \in R \mid f_s > 0\}$ - *носитель нечёткой коалиции* f.

Определение 2. *Будем говорить, что план* $(\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ *блокируется нечёткой коалицией* $f = (f_1, \dots, f_r)$, *если сущ. рег. планы* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \ s \in R(f)$, *такие, что*

(1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in R(f)$,

(2) $\sum_{s \in R(f)} f_s u^s \geq \sum_{s \in R(f)} f_s v^s$.

Множесто сбаланс. планов $\mathcal{M}$, не блокируемых никакой нечёткой коалицией f, обозначим через $C_F(\mathcal{M})$ и назовем **нечётким ядром модели** $\mathcal{M}$. (Если в (2)- строгое векторное неравенство $\gg$, то говорят, что план $(\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ *строго блокируется* нечёткой коалицией $f = (f_1, \dots, f_r)$; при этом совокупность сбаланс. планов $\mathcal{M}$, которые не могут строго блокироваться никакой нечёткой коалицией f, будем обозначать через $C_F^s(\mathcal{M})$ и называть **строгим нечётким ядром** модели $\mathcal{M}$).

$\star$

4 Строгое ядро $C_F^s(\mathcal{M})$ и ядра $C_F(\mathcal{M})$ и $C_F^{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$.

Определение 3. *План* $z = (z^1, \dots, z^r) \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ *строго блокируется коалицией* $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \sigma_F$, *если существуют региональные планы* $z^s \in Z_s$, $s \in R(\tau)$, *такие, что*

$$t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in R(\tau),$$
$$\sum_{s \in R(\tau)} \tau_s u^s \gg \sum_{s \in R(\tau)} \tau_s v^s.$$

Множество сбаланс. планов модели $\mathcal{M}$, *которые не могут строго блокироваться никакой коалицией* $\tau \in \sigma_F$, *называется строгим нечетким ядром* $\mathcal{M}$ *и обозначается через* $C_F^s(\mathcal{M})$.

Предложение 1. *Если регионы модели* $\mathcal{M}$ *строго автаркические, то строгое неч. ядро* $C_F^s(\mathcal{M})$ *совпадает с нечетким ядром* $C_F(\mathcal{M})$

$$C_F^s(\mathcal{M}) = C_F(\mathcal{M}). \tag{1}$$

Предложение 2. *Для любой системы* $\mathcal{M}$ *строгое ядро* $C_F^s(\mathcal{M})$ *содержит нечеткое* $\mathcal{Q}$*-ядро* $C_F^{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$

$$C_F^{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}) \subseteq C_F^s(\mathcal{M}). \tag{2}$$

$\star$

5 Равновесия Эджворта

Дробление (измельчение) модели $\mathcal{M}$.

Зафиксируем $k \geq 1$ и положим

$$R_{[k]} := \{(s,m) \mid s \in R,\ m = 1,\dots,k\}. \tag{3}$$

Для каждого $(s,m) \in R_{[k]}$ (понимаемого в дальнейшем как "номер"m-ой доли региона $s \in R$ исходной экономики $\mathcal{M}$) введём матрицы A^{sm}, G^{sm}, H^{sm} и векторы b^{sm}, d^{sm}, полагая

$$A^{sm} := A^s,\ G^{sm} := G^s,\ H^{sm} := H^s,\ b^{sm} := \frac{1}{k}b^s,\ d^{sm} := d^s. \tag{4}$$

Определение 4. *Модель многорегиональной экономической системы*

$$\mathcal{M}_{[k]} :=< R_{[k]}, \{A^{sm}, G^{sm}, H^{sm}, b^{sm}, d^{sm}\}_{(s,m)\in R_{[k]}} >, \tag{5}$$

параметры которой определяются соотношениями (1) *и* (2), *будем называть* **k-дроблением модели $\mathcal{M}$**.

Наконец, для $k \geq 1$ черз $z_{[k]}$ обозначим **k-дробление плана** $z = (z^s)_{s\in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, представляющее собой сбалансированный план модели $\mathcal{M}_{[k]}$, построенный из региональных составляющих z^s плана z по формуле:

$$(z_{[k]})^{sm} := \frac{1}{k}z^s, \quad s \in R,\ m = 1,\dots,k.$$

$\star$

Равновесие Эджворта модели $\mathcal{M}$.

Завершая описание конструкции, лежащей в основе понятия равновесия Эджворта, напомним определение обычного (то есть порождаемого обычными коалициями $T \subseteq R$) блокирования и обычного ядра в модели $\mathcal{M}$.

Определение 5. *Коалиция T* **блокирует** $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, *если у неё имеется план $(z^s)_{s \in T} = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in T} \in \prod_{s \in T} Z_s$, для которого выполняются соотношения*

(1) $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in T,$

(2) $\sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s.$

Множество всех планов $z \in Z_{\mathcal{M}}(R)$, которые не блокируются никакой (обычной) коалицией $T \subseteq R$, будем обозначать через $C(\mathcal{M})$ и называть **ядром модели** $\mathcal{M}$.

Определение 6. *План $\bar{z} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ называется равновесием Эджворта модели $\mathcal{M}$, если все его k-дробления содержатся в ядрах соответствующих дроблений модели $\mathcal{M}$:*

$$\bar{z}_{[k]} \in C(\mathcal{M}_{[k]}) \quad \text{для всех} \quad k \geq 1.$$

Совокупность всех равновесий Эджворта модели $\mathcal{M}$ будем обозначать через $E(\mathcal{M})$.

$\star$

6 $\mathcal{Q}$-ядро и равновесие Эджворта

$\mathcal{Q}$ - множество неотрицательных рациональных чисел. Положим

$$\sigma_F^{\mathcal{Q}} = \{\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r) \in \sigma_F \mid \tau_s \in \mathcal{Q},\ s \in R\}.$$

Элементы $\sigma_F^{\mathcal{Q}}$ - *нечеткие $\mathcal{Q}$-коалиции.*

Определение 7. *План $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z_{\mathcal{M}}(R)$ блокируется нечеткой $\mathcal{Q}$-коалицией, если существует $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) \in \sigma_F^{\mathcal{Q}}$, и региональные планы $z^s \in Z_s$, $s \in R(\tau)$, такие, что $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$, $s \in R(\tau)$, и при этом $\sum_{s \in R(\tau)} \tau_s u^s \geq \sum_{s \in R(\tau)} \tau_s v^s$.*

Обозначим семейство всех сбалансированных планов системы $\mathcal{M}$, которые не блокируются никакой нечеткой $\mathcal{Q}$-коалицией, через $C_F^{\mathcal{Q}}$, и назовем его *нечетким $\mathcal{Q}$-ядром* $\mathcal{M}$.

Нечеткое $\mathcal{Q}$-ядро и множество равновесий Эджворта модели $\mathcal{M}$ совпадают [VS].

Теорема 1. *Для каждой модели $\mathcal{M}$ выполняется равенство*

$$E(\mathcal{M}) = C_F^{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}).$$

$\star$

7 Равновесия Эджворта и ядра

Т.к. из Определений 2,3 вытекает вложение $C_F(\mathcal{M}) \subseteq C_F^{\mathcal{Q}}(\mathcal{M})$, в силу Предложений 1 и 2 выполняются теоремы эквивалентности.

Теорема 2. *Пусть каждый регион модели $\mathcal{M}$ является строго автаркическим. Тогда ее нечеткое ядро совпадает с нечетким $\mathcal{Q}$-ядром*

$$C_F(\mathcal{M}) = C_F^{\mathcal{Q}}(\mathcal{M}). \tag{6}$$

Из Теорем 1,2 вытекает основная теорема эквивалентности работы.

Теорема 3. *Если все регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические, то множество ее равновесий Эджворта совпадает с нечетким ядром*

$$E(\mathcal{M}) = C_F(\mathcal{M}). \tag{7}$$

$\star$

Эквивалентность равновесий Вальраса и Эджворта

Теорема 4. *Если регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то ее неч. ядро $C_F(\mathcal{M})$ совпадает с множеством вальрасовских планов $W(\mathcal{M})$.*

Учитывая, что для нечеткого ядра и равновесий Эджворта имеет место вложение $C_F(\mathcal{M}) \subseteq E(\mathcal{M})$, нижеследующая теорема эквивалентности является усилением теоремы 1.

Теорема 5. *Если все регионы системы $\mathcal{M}$ строго автаркические и ненасыщенные, то множество ее вальрасовских равновесий совпадает с множеством равновесий Эджворта*

$$W(\mathcal{M}) = E(\mathcal{M}).$$

$\star$

8 О существовании равновесия Эджворта

Полученные условия существования равновесия Эджворта найдены с применением обобщения известной теоремы Скарфа о ядре на случай нечетких игр (Васильев В.А., 2012). Напомним формулировку этого обобщения. Обозначим через $\mathcal{M}_0$ однородную составляющую модели $\mathcal{M}$, отличающуюся от нее только в том, что начальные ресурсы и технологический потенциал регионов - нулевые:

$$\mathcal{M}_0 =< R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s \in R} > .$$

Определение 8. *Говорят, что $\mathcal{M}$ не имеет "рога изобилия", если совокупность сбаланс. планов $Z_{\mathcal{M}_0}(R)$ ее однородной составляющей $\mathcal{M}_0$ не содержит ненулевых планов: $Z_{\mathcal{M}_0}(R) = \{0\}$.*

Упоминавшееся обобщение теоремы Скарфа имеет вид.

Теорема 6. *Если $\mathcal{M}$ не имеет "рога изобилия"и все ее регионы автаркические, то $C_F(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.*

Объединяя Теоремы 3,6 получаем один из главных результатов доклада - новую теорему существования равновесий Эджворта, не использующую предположения о ненасыщаемости $\mathcal{M}$.

Теорема 7. *Если все регионы модели $\mathcal{M}$ строго автаркические и $\mathcal{M}$ не имеет "рога изобилия", то $E(\mathcal{M}) \neq \emptyset$, и при этом $E(\mathcal{M}) = C_F(\mathcal{M})$.*

$\star$

9 Некоторые приложения теорем эквивалентности

Напомним [4,5], что однородная составляющая $\mathcal{M}_0$ модели $\mathcal{M}$ отличается от нее только тем, что ресурсно-технологический потенциал каждого из регионов модели $\mathcal{M}_0$ равен нулю: $b^s = 0$ для каждого $s \in R$.

Определение 9. *Будем говорить, что модель* $\mathcal{M}$ *не имеет "рога изобилия", если множество сбалансированных планов однородной составляющей* $\mathcal{M}_0$ *этой модели исчерпывается нулевым планом:* $Z_{\mathcal{M}_0}(R) = \{0\}$.

Отметим, что отсутствие "рога изобилия" в смысле определения 9 означает, как и в классических моделях равновесного анализа, что при нулевом экономическом потенциале возможна лишь нулевая хозяйственная активность.

$\star$

Еще одно, чисто техническое условие регулярности, используемое для получения новой теоремы существования вальрасовских равновесий рассматриваемых экономических систем.

Определение 10. *Будем говорить, что модель* $\mathcal{M}$ *является* $\mathcal{P}$*-регулярной, если* $P'(\mathcal{M}) = P(\mathcal{M})$*, где* $P(\mathcal{M})$ *- множество Парето-оптимальных, а* $P'(\mathcal{M})$ *- слабо Парето-оптимальных планов из* $Z_{\mathcal{M}}(R)$.

Опираясь на теорему 5 и упоминавшийся уже результат из [5], касающийся существования равновесия Эджворта модели $\mathcal{M}$, получаем новые условия существования вальрасовских равновесий в многорегиональных экономических системах, не включающие, в отличие от [8], требования ограниченности множеств $Z_s,\ s \in R$.

Теорема 8. *Если* $\mathcal{M}$ *является* $\mathcal{P}$*-регулярной и не имеет "рога изобилия", а ее регионы - строго автаркические и ненасыщенные, то в* $\mathcal{M}$ *существует равновесие Вальраса.*

⋆

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Vasil'ev V.A. On Edgeworth equilibria for some types of non-classic markets. Siberian Advances in Mathematics. 1996. V. 6, № 3. P. 96–150.

[2]. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1983.

[3]. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. Новосибирс Наука. Сиб. Науч. Изд-во. 2007.

[4]. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем. Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. XII, № 4(40). С. 23–34.

[5]. Васильев В.А., Суслов В.И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений. Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. Т. XIII, № 1(41). С. 18–33.

[6]. Васильев В.А. О существовании вальрасовского равновесия в модели межрегиональных экономических отношений. Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т.19, № 4. С.15–34.

[6]. Гильденбранд В. Ядро и равновесие в большой экономике: Пер. с англ. М.: Наука. 1986.

[7]. Алипрантис К., Браун Д., Бёркеншо О. Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир. 1995.