Алгоритмы оптимального решения задачи размещения с ограниченными объемами производства и пропускными способностями коммуникаций.

Гимади Э.Х., Цидулко О.Ю.

ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия

XIII международная азиатская школа-семинар "Проблемы оптимизации сложных систем" (20 сентября 2017)

Введение

Задача размещения производства (FLP) составляет один из наиболее актуальных и широких разделов в области дискретной оптимизации и исследования операций. Данная задача интересна как с теоретической точки зрения, так и с практической, поскольку имеет обширный ряд приложений: планирование производства предприятия, стандартизация, сетевое планирование, кластерный анализ и многое другое.

Наиболее просто формулируется задача размещения с неограниченными объемами производства (Uncapacitated Facility Location Problem, сокр. UFLP):

$$\sum_{i\in M} f_i x_i + \sum_{j\in V}\sum_{i\in M} b_j c_{ij} x_{ij} \to \min$$

subject to

$$\sum_{i\in M} x_{ij} = 1,\ j \in V,$$

$$x_{ij} \le x_i,\ i \in M,\ j \in V,$$

$$x_{ij}, x_i \in \{0, 1\},$$

где

M — мн-во возможных мест предприятий,

$$|M| = m;$$

V — мн-во пунктов спроса (потребителей),

$$|V| = n;$$

b_j — объём спроса в пункте j;

f_i — стоимость открытия предприятия в пункте i;

c_{ij} — затраты на транспортировку единицы продукции от действующего предприятия в пункте i до потребителя j;

x_i и x_{ij} — переменные выбора и назначения соответственно.

UFLP NP-трудна в общем случае (к ней сводится NP-трудная задача покрытия множествами). Полиномиально разрешима на древовидных сетях: $O(nm)$ (Gim 1983).

Существенно более сложной является задача размещения с ограниченными объемами производства (Capacitated Facility Location Problem, сокр. CFLP).
Более формально, в CFLP каждое предприятие i имеет мощность a_i, определяющую максимальный объем товаров, которые он может произвести.
Существует два варианта этой проблемы:unsplitable CFLP (спрос клиента должен обслуживаться только одним предприятием) и splitable CFLP (требование клиента можно разделить между несколькими открытыми предприятиями).

RCFLP

Рассмотрим еще более сложный случай задачи размещения (Restricted CFLP, или RCFLP), когда ограничены как объемы производства, так и пропускные способности коммуникаций.

Пусть даны граф $G = (V, E)$ и $n = |V|$.

В каждом узле графа есть потребитель, и в нем может быть, в принципе, открыто предприятие $i \in V$ с установленной стоимостью открытия f_i (равного бесконечности, если в этом узле открывать предприятие нельзя).

Для каждого ребра $e \in E$ заданы стоимость c_e транспортировки единицы продукта по ребру и пропускная способность q_e этого ребра.

RCFLP

Еще более сложной становится задача Restricted CFLP (RCFLP) — с учетом как ограничений на объемы производства, так и ограничений на пропускные способности коммуникаций.

$$\sum_{i \in V} f_i y_i + \sum_{i,j \in V} \sum_{p \in P_{ij}} c_{ij}^p x_{ij}^p \to \min_{y_i, x_{ij}^p} \tag{1}$$

$$\sum_{j \in V} \sum_{p \in P_{ij}} x_{ij}^p \leq a_i y_i, \ i \in V, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{p \in P_{ij}} x_{ij}^p = b_j, \ j \in V, \tag{3}$$

$$\sum_{i,j \in V,\, p \in P_{ij}:\, e \in p} x_{ij}^p \leq q_e, \ e \in E, \tag{4}$$

$$0 \leq x_{ij}^p \leq b_j y_i, \ i,j \in V, \tag{5}$$

$$x_{ij}^p \geq 0, y_i \in \{0,1\}, \tag{6}$$

where

b_j — объем спроса в узле j;

a_i — объем производства в узле i;

f_i — стоимость открытия предприятия в узле i;

P_{ij} — множество всех путей из узла i в узел j;

c_e — стоимость транспортировки единицы продукта по ребру e;

$c_{ij}^p = \sum\limits_{e \in p} c_e$ — стоимость транспортировки единицы продукта по по пути p из i в j;

q_e —пропускная способность ребра e;

y_i — переменная выбора открывать предприятие в узле i или нет;

x_{ij}^p — количество продукта доставляемого от предприятия i к потребителю j вдоль пути $p \in P_{ij}$.

Ограничения (3) соответствуют требованиям каждого потребителя.
Ограничения (2) не позволяют превысить объем производства открытого предприятия.
Ограничения (4) гарантируют, что поток продукта по каждому ребру e не превысит его пропускную способность.

RCFLP

Задача (1), (3), (5) – (6) (без учета ограничений на объемы производства и пропускные способности коммуникаций) = UFLP) [Mirchandani,1990].

Задача (1) – (3), (6) (без учета ограничений на пропускные способности ребер) = CFLP [Mirchandani,1990].

Задача (1), (3) – (6) (без учета ограничений на объемы производства) = RFLP [Voznuk,1999].

Известные и новые результаты для RCFLP:

Задача RCLP NP-трудна на графах произвольного типа.

Ageev, Gimadi, Kurochkin (2009): задача CFLP с одинаковыми объемами производства (uniform facility capacities) на линейном графе решается за время $O(m^4 n^2)$, где m — ограничение на число открытых предприятий.

Вознюк.1999: задача (1), (3)–(6) (RFLP на дереве) была решена за время $O(n^3 b^2)$, где $b = \max\limits_{j \in V} b_j$.

Далее мы рассмотрим метрическую версию задачи CFLP и покажем, что она псевдо-полиномиально разрешима, если входной граф — дерево. Также представим полиномиальные алгоритмы ДП для двух вариантов задачи RCFLP на линейном графе.

$$\sum_{i\in V} f_i y_i + \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} c_{ij}x_{ij} \to \min_{y_i, x_{ij}} \tag{7}$$

при условиях

$$\sum_{j\in V} x_{ij} \le a_i y_i,\ i \in V, \tag{8}$$

$$\sum_{i\in V} x_{ij} = b_j,\ j \in V, \tag{9}$$

$$\sum_{i\in V}\sum_{j|e\in P_{ij}} x_{ij} \le q_e,\ e \in E, \tag{10}$$

$$x_{ij} \ge 0, y_i \in \{0,1\}, \tag{11}$$

где $c_{ij} = \sum_{e\in P_{ij}} c_e$ для всяких $i \in V$, и $j \in V$.

Алгоритм решения RCFLP на сети в форме дерева

Statement 1

The RCFLP on a tree can be solved in $O(nB^2)$-running time, where $B = \sum\limits_{j \in V} b_j$ is the total demand.

Алгоритм

Preliminary Stage 1. Во-первых, мы сводим задачу с ограниченными объемами производства (8) и ограниченными пропускными способностями коммуникаций (ребер) к задаче с ограничениями только на пропускные способности ребер. Это делаем путем переноса каждого возможного места i размещения в фиктивную вершину i' и преобразованием объемов производства в ограничение на пропускную способность фиктивного ребра (i, i').

Детали шага 1

For each vertex $i \in G$ such that the cost of opening a facility at i is $f_i < \infty$ we will add a dummy vertex i' and an edge (i', i). We are going to move the places where a facility might be opened from all such vertices i to the corresponding i'. Set the cost of opening a facility at i' equal to $f_{i'} = f_i$ and then set $f_i = \infty$. The demand at i' is $b_{i'} = 0$, the cost of transportation of a unit of product along the edge (i', i) is $c_{(i',i)} = 0$. Finally, the transportation capacity of the edge (i', i) is equal to the facility capacity at i in the graph G : $q_{(i',i)} = a_i$. Denote this new graph by G'. The problem (7) on the graph G' with constrains (9), (10), and (11) is equivalent to the problem on the graph G with constrains (8)–(11). While in the graph G a facility at site i cannot produce more then a_i units of product, in the graph G' a facility at site i' produces any number of product, but the edge (i', i) that connects the facility with the rest of the graph can transfer at most a_i units. Note that G' has at most $2n$ vertices.

Preliminary Stage 2. Затем мы сводим задачу на произвольном дереве к задаче на двоичном дереве. Выберем вершину r в качестве коневой. Начиная с r, вершину v, с сыновьями $u_1, \dots, u_k$, $k > 2$, заменим на путь из $k-1$ вершин $v_1, \dots, v_{k-1}$ и добавим ребра $(v_1, u_1), (v_2, u_2) \dots, (v_{k-1}, u_{k-1})$ и (v_{k-1}, u_k). Дадим объемы спроса $b_{v_1} = b_v$, $b_{v_2} = \dots = b_{v_{k-1}} = 0$, затраты на открытие объекта $f_{v_1} = f_{v_2} = \dots = f_{v_{k-1}} = \infty$, так как после первой стадии у вершин с конечной стоимостью открытия имеется только один сосед. Стоимости транспортировки для каждого ребра в пути $(\mathrm{v}_1, \dots, v_{k-1})$:= нулю, а пропускные способности ребер полагаем максимально возможным, т.е. $\sum_{v \in V} b_v$. Для каждого ребра (v_i, u_i), $1 \le i < k$, полагаем $c_{(v_i,u_i)} = c_{(v,u_i)}$ и $q_{(v_i,u_i)} = q_{(v,u_i)}$.

Lemma 1

[Voznuk.1999] *Задача (7), (9)–(11) на произвольном дереве сводится к задаче на бинарном дереве с не более чем двойным числом вершин.*

Stage 3. Схема ДП.

В результате двух предыдущих стадий мы имеем задачу без ограничений на объемы производства на корневом бинарном дереве $G_0 = (V_0, E_0)$ с корнем $r = 0$ и числом вершин $V_0 \leq 4n$, где n — число вершин в исходном дереве G.

Алгоритм решения RCFLP на сети в форме дерева

Рассмотрим поддерево G_i с корнем i. Пусть вершина j —родительская для i и z — суммарный объем продукта, переносимого вдоль ребра $e = (j, i)$. Обозначим через $F_i(z)$ оптимум подзадачи на поддереве G_i, предполагая, что z единиц продукта переносятся вдоль ребра e.
Напомним, что в (6) $y_i \in \{0, 1\}$ являются переменными выбора того, следует ли открывать предприятие в узле i. Поэтому каждый раз в уравнениях Беллмана мы решаем, следует ли открывать предприятие в узле i и удовлетворять спрос потребителя в поддереве, используя его производительность, или не открывать объект и, следовательно, использовать поток z для удовлетворения спроса в узле i и передать остальную часть потока в поддерево. Для каждого $z \in [-q_e, q_e]$ и $i \in V_0$:

Рекуррентные соотношения ДП

1. **Если вершина i — лист дерева:**

$$F_i(z) = \begin{cases} c_e z, & \text{if} \quad b_i \le z \le q_e; \\ f_i - c_e z, & \text{if} \quad -q_e \le z \le 0; \\ \infty & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12}$$

2. **Если вершина i имеет одного сына:**

$$F_i(z) = c_e|z| + \min\left\{F_k(z - b_i);\ f_i + \min_{z' \in [0, q_{i,k}]} F_k(z')\right\} \tag{13}$$

3. **Если вершинах i имеет 2 сына k and ℓ:**

$$F_i(z) = c_e|z| + \min\Bigg\{ \min_{|z'| \le q_{(i,k)}} \{F_k(z') + F_k(z - b_i - z')\};$$

$$f_i + \min_{z' \in [0, q_{(i,k)}]} F_k(z') + \min_{z' \in [0, q_{(i,\ell)}]} F_\ell(z') \Bigg\} \tag{14}$$

Анализ алгоритма

Вычисление $F_i(z)$, $|z| \leq q_e$, $i \in V_0$ **занимает время** $O\left(n(\max_{e \in E_0} q_e)^2\right)$ **и восстановление решения требует времени** $O(n)$. **Заметим, что можно принять** $\max_{e \in E_0} q_e \leq B$, **где** $B = \sum_{i \in V_0} b_i$ **— общая потребность, так как** B **является наибольшим возможным объемом продукта, который нам когда-либо понадобится для переноса по ребру в решении этой задачи. Таким образом, временная сложность алгоритма равна** $O(nB^2)$ **или** $O(n \min\{B^2, q_{max}^2\})$.

Corollary 1.

В случае единичного спроса предложенный алгоритм выполняется за время $O(n^3)$.

Corollary 2.

В случае линейного графа с неболее чем m возможными местами размещения предприятий временная сложность алгоритма $O(mB^2)$.

NB: Для CFLP (без ограничений на пропускные способности на линейном графе существует алгоритм [Mirchandani.1996], который выполняется за время $O(mB\min\{a_{max}, B\})$, где m — количество предприятий, которые можно открыть. В этом случае наш алгоритм даст почти такую же трудоемкость $O(m\min\{a_{max}^2, B^2\})$, так как a_{max}

RCFLP на линейном графе

Рассмотрим метрическую RFLP (7), (9) —11) на линейном графе. Пусть вершины линейного графа нумеруются $1, \dots, n$ в порядке его обхода. Стоимость c_{ij} транспортировки единицы продукта от i до j естественно определяется как $c_{ij} = \sum_{e \in P_{ij}} c_e$. Эти транспортные расходы удовлетворяют условиям *central-connectivity*: для каждого i_1, i_2, $v \in V$, если $c_{i_1 v} < c_{i_2 v}$, тогда $c_{i_1 j} < c_{i_2 j}$ для всех узлов j в кратчайшем пути от i_1 до v.

Statement 2. [Gimadi.1984] Для задачи FLP на графе с условием центральной связности существует такое оптимальное решение, что для каждого открытого объекта зона обслуживания является связанным подграфом. Решения такого типа будут называться центрально-связным.

Таким образом, для рассматриваемой RFLP на линейном графе существует оптимальное решение, где граф разбивается на непрерывные сегменты, и в каждом сегменте есть одно открытое предприятие, которое полностью обслуживает клиентов этого сегмента. Как уже упоминалось ранее, существуют постановки unsplitable и splitable RFLP. В первом случае каждый клиент должен обслуживаться только одним предприятиемм. Таким образом, в оптимальном центрально-связном решении соседние сегменты не пересекаются. Во втором случае каждый потребительский спрос может быть удовлетворен несколькими предприятиями. Это означает, что соседние сегменты в оптимальном центрально-связном решениии могут иметь одну общую вершину, если ограничения пропускной способности ребер позволяют покрыть полный спрос в этой вершине соответствующим предприятием с самой дешевой стоимостью транспортировки.

Указанные выше задачи на линейном графе могут быть решены посредством ДП единообразным образом.

Процедура ДП. Добавить фиктивные вершины $0, n+1$ и ребра $e' = (0,1), e'' = (n, n+1)$ на линиие. Установит следующие численные характеристики для новых элементов входа: $q_{e'} = q_{e''} = 0, c_{e'} = c_{e''} = \infty, f_0 = f_{n+1} = 0, b_0 = b_{n+1} = 0$. Рассмотрим unsplitable RFLP на линии. Обозначим через $h(i,j)$ минимальную стоимость обслуживания сегмента $[i,j]$.

$$h(i,j) = \min_{i \le k \le j} \{f_k + \widehat{c}_{ki} + \widehat{c}_{kj}\}.$$

Здесь $\widehat{c}_{xy}$ — суммарные транспортные затраты на удовлетворение спроса в точках пути от x до y, если продукт поставляется из предприятия в узле x. Если невозможно удовлетворить спрос из-за ограничений на пропускные способности ребер, то полагаем $\widehat{c}_{xy} = \infty$.

Согласно Утв. 2 и рассуждениям выше, задача сводится к задаче ближайшего соседа на линейном графе:

$$\sum_{k=1}^{s+1} h(i_k, i_{k+1}) \to \min_{\{i_k\}}, \tag{15}$$

s.t.

$$0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_s < i_{s+1} = n+1, \; s = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Задача (15) – (16) решается посредством схемы ДП:

$$H(0) = 0; H(j) = \min_{0 \le i < j} (H(i) + h(i,j)), \; j = 1, \ldots, n+1,$$

Оптимум равен $H(n+1)$ и может бть найден за время $O(n^3)$.

Per aspera ad astra!

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!