

Метод расчета трехмерных задач конвекции: реализация расщепления по физическим процессам *

А.Ф. ВОЕВОДИН

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
e-mail: voevodin@hydro.nsc.ru

О.Н. ГОНЧАРОВА

Алтайский государственный университет, Барнаул
Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск

Для расчета конвективных движений жидкости в трехмерных областях (параллелепипедах) предлагается метод, в котором реализована идея расщепления по физическим процессам. В задачах конвекции в замкнутых областях и при длительных процессах во времени необходимо точно выполнять условия прилипания и непротекания на твердых стенках, гарантировать сохранение соленидальности поля скоростей и его энергетическую нейтральность. Схема расщепления, предлагаемая в работе, является физически оправданной и обладает свойством устойчивости в линейном приближении. Расщепление на конвективный и диффузионный переносы проводится для уравнений конвекции Обербека -Буссинеска, записанных в физических переменных. На этапе диффузии осуществляется переход к переменным "ротор скорости - векторный потенциал скорости". Для его реализации разработан вариант метода прогонки с параметрами, представлена конечно-разностная схема второго порядка.

1. Введение

Классические уравнения конвекции Обербека — Буссинеска применяются для изучения тепловой гравитационной конвекции в замкнутых областях с твердой непроницаемой границей [1, 2]. Конвективный и диффузионный переносы естественным образом выделяются как в уравнениях движения, так и в уравнении переноса тепла. Идея метода расщепления по физическим процессам базируется на методе слабой аппроксимации и аддитивности этих процессов для достаточно малых шагов по времени [3, 4]. Общая теория расщепления наиболее полно изложена в [5], используется в [6] и развивается в [7, 8, 9, 10]. В отличие от задач протекания, в задачах конвекции в замкнутых областях и при длительных процессах во времени необходимо точно выполнять условия прилипания и непротекания на твердых стенках, гарантировать сохранение свойства соленидальности поля скоростей и свойство сохранения среднеквадратичной нормы скорости при переходе со слоя на слой [8, 9, 10]. Расщепление на конвективный и диффузионный переносы в уравнениях конвекции позволяет также исключить расчет градиента давления и обеспечить автоматически соленидальность вектора скорости. Выделение этапа

*Работа выполнена в рамках совместного Интеграционного проекта СО РАН № 116 "Моделирование, оптимизация и устойчивость конвективных течений" и при финансовой поддержке Гранта РФФИ № 10-01-00007.

конвекции в уравнениях конвекции обеспечивает корректность расщепления при удовлетворении граничным условиям. Из условий прилипания и гиперболичности системы уравнений следует, что граничные условия на этапе конвекции являются следствием уравнений. Этап диффузии реализуется в переменных "вихрь - функция тока" для двумерных задач и "ротор скорости - векторный потенциал скорости" для трехмерных задач. Введение новых искомым функций на этапе диффузии после расщепления позволяет использовать неявные разностные схемы и доказать устойчивость разностной начально-краевой задачи. Уравнения для компонент ротора скорости решаются независимо друг от друга. На этапе диффузии для новых искомым функций записываются следствия условий прилипания на границе. Эти условия для компонент ротора скорости используются непосредственно, а для векторного потенциала используются условия, выражающие равенство нулю касательных составляющих векторного потенциала и производной по нормали его нормальной составляющей.

Этап конвекции реализуется для компонент вспомогательной функции, условно названной конвективной скоростью, на основе элементарных схем Кранка - Николсона. Принципиальным моментом в организации расчета является введение смещенных сеток (см. [11]). Сетки (n, m', l') , (n', m, l') и (n', m', l) используются для расчета компонент вспомогательной конвективной скорости, а (n, m, l) — для расчета температуры. Смещенные сетки (n', m, l) , (n, m', l) , (n, m, l') вводятся для расчета соответствующих компонент векторного потенциала и ротора скорости на этапе диффузии. Для реализации этапа диффузии строится алгоритм прогонки с параметрами [8, 9, 10, 12]. При написании граничных условий для новых искомым функций следует исходить из их выполнения с учетом смещения некоторых границ.

Остановимся подробнее на реализации этапа диффузии.

2. Реализация этапа диффузии

При переходе на этап диффузии ротор конвективной скорости рассчитывается на вспомогательных сетках. Так называемый конвективный вихрь берется в качестве начального условия для этапа диффузии.

Алгоритм прогонки с параметрами на этапе диффузии представим на примере первых компонент ротора скорости и векторного потенциала w^1 , ψ^1 (индекс 1 для удобства изложения опустим). Пусть имеет место следующее представление первой компоненты ротора скорости:

$$w_{n',m,l} = \overset{ooo}{w}_{n',m,l} + \alpha_m^2 w_{n',1,l} + \beta_m^2 w_{n',M1,l} + \alpha_l^3 w_{n',m,1} + \beta_l^3 w_{n',m,L1}. \quad (1)$$

Первое слагаемое отвечает за удовлетворение однородным граничным условиям для компоненты ротора скорости на двух гранях параллелепипеда, а граничные условия на четырех оставшихся гранях называются параметрами. Коэффициенты при параметрах вычисляются только один раз. Пользуясь представлением (1), связью компонент ротора скорости и векторного потенциала, а также перестановочностью разностных операторов, получим, в итоге, конечно-разностную схему для вычисления искомым функций.

Построим конечно-разностную схему второго порядка для вычисления слагаемого $\overset{ooo}{w}$:

$$B_1 B_2 B_3 \overset{ooo}{w}_{n',m,l} = F_{n',m,l}, \quad F_{n',m,l} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 w_{n',m,l}^k + \tau f_{n',m,l},$$

последовательные этапы реализации которой состоят в расщеплении по направлениям и итоговом вычислении $\overset{ooo}{w}_{n',m,l}$ ($n' = 1, \dots, N; m = 2, \dots, M; l = 2, \dots, L$) на последнем этапе. Имеет место следующая очередность прогонок по направлениям:

прогонка по z :

$$B_3 \overset{o}{w}_{n',m,l} = F_{n',m,l}, \quad \overset{o}{w}(n, m, i) = 0 \quad (i = \{1; L1\}),$$

$$F_{n',m,l} = \bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 w_{n',m,l}^k + \tau f_{n',m,l},$$

прогонка по y :

$$B_2 \overset{oo}{w}_{n',m,l} = \overset{o}{w}_{n',m,l}, \quad \overset{oo}{w}(n, i, l) = 0 \quad (i = \{1; M1\}),$$

прогонка по x :

$$B_1 \overset{ooo}{w}_{n',m,l} = \overset{oo}{w}_{n',m,l}, \quad \overset{ooo}{w}(i, m, l) = 0 \quad (i = \{1; N\}). \quad (2)$$

Здесь введены обозначения $B_i = E - \bar{\nu} \frac{\tau}{2} \Lambda_i$, $\bar{B}_i = E + \bar{\nu} \frac{\tau}{2} \Lambda_i$, $\Lambda_i \sim \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ($i = 1, 2, 3$), x_i при $i = 1, 2, 3$ обозначают x, y, z , соответственно. Только один раз могут быть найдены коэффициенты α, β в результате решения конечно-разностных задач: $B_2 \alpha_m^2 = 0$, $\alpha_1^2 = 1, \alpha_{M1}^2 = 0$; $B_2 \beta_m^2 = 0$, $\beta_1^2 = 0$, $\beta_{M1}^2 = 1$; $B_3 \alpha_l^3 = 0$, $\alpha_1^3 = 1$, $\alpha_{L1}^3 = 0$; $B_3 \beta_l^3 = 0$, $\beta_1^3 = 0$, $\beta_{L1}^3 = 1$. Возможность изложенного нахождения α_i, β_i обеспечивается перестановочностью разностных операторов B_i .

Представим конечно-разностную схему для вычисления ψ в следующем виде:

$$\tilde{B}_2 \tilde{B}_3 \tilde{B}_1 \psi_{n',m,l} = F_{n',m,l} \quad (n' = 1, \dots, N; m = 2, \dots, M; l = 2, \dots, L),$$

$$F_{n',m,l} = \bar{\tilde{B}}_2 \bar{\tilde{B}}_3 \bar{\tilde{B}}_1 \psi_{n',m,l}^k + \lambda \tau \overset{ooo}{w}_{n',m,l}.$$

Здесь введены обозначения $\tilde{B}_i = E - \lambda \frac{\tau}{2} A_i$, $\bar{\tilde{B}}_i = E + \lambda \frac{\tau}{2} A_i$ ($i = 1, 2, 3$), где

$$(A_1 \psi)_{n',m,l} = (\Lambda_1 \psi)_{n',m,l},$$

$$(A_2 \psi)_{n',m,l} = (\Lambda_2 \psi)_{n',m,l} - \alpha_m^2 [\Lambda_2 \psi]_{n',1,l} - \beta_m^2 [\Lambda_2 \psi]_{n',M1,l},$$

$$(A_3 \psi)_{n',m,l} = (\Lambda_3 \psi)_{n',m,l} - \alpha_l^3 [\Lambda_3 \psi]_{n',m,1} - \beta_l^3 [\Lambda_3 \psi]_{n',m,L1}$$

и λ — итерационный параметр. Прогонка с параметрами как способ одновременного решения систем уравнений для компоненты ротора скорости w и векторного потенциала ψ представляет собой двухполевой безытерационный способ расчета с точным удовлетворением (в разностном смысле) следствиям условий прилипания [8].

Реализация схемы расчета ψ представляет собой последовательное осуществление следующих этапов:

(1) первый этап состоит в осуществлении прогонки с параметрами для решения системы алгебраических уравнений

$$\tilde{B}_2 \bar{\psi}_{n',m,l} = F_{n',m,l}, \quad \bar{\psi}_{n',i,l} = 0 \quad (i = \{1; M1\}),$$

(2) второй этап расчета состоит в осуществлении прогонки с параметрами для решения системы уравнений

$$\tilde{B}_3 \bar{\psi}_{n',m,l} = \bar{\psi}_{n',m,l}, \quad \bar{\psi}_{n',m,i} = 0 \quad (i = \{1; L1\}),$$

(3) и, наконец, третий этап состоит в применении обычной прогонки для решения системы уравнений

$$\tilde{B}_1 \psi_{n',m,l} = \bar{\psi}_{n',m,l}, \quad (\psi_x)_{i,m,l} = 0 \quad (i = \{1; N\}). \quad (3)$$

Благодаря перестановочности операторов, входящих в две разностные схемы (2) и (3), алгоритм расчета может быть реализован таким образом, что граничные условия для вспомогательных функций на внутренних (вспомогательных) шагах схем являются однородными. Алгоритмы расчета внутренних шагов в этих схемах являются прогонками для решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений.

При реализации граничных условий для вихря w (в данном случае - это первая компонента ротора скорости), например, при $y = 0$ используется конечно-разностная аппроксимация условия $w = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$. При использовании смещенных сеток требуется задавать граничные условия для компонент векторного потенциала и ротора скорости на смещенных границах. Для первых компонент искомых функций смещаться будут границы $x = 0$ и $x = x_0$. Реализация граничных условий $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, $w = 0$, заданных при $x = 0$ и $x = x_0$, осуществляется на смещенных границах (при значениях индекса $n' = 1, N$) с помощью представлений $\psi_{0,m,l} = \psi_{1,m,l}$ и $w_{0,m,l} = -w_{1,m,l}$ для $n' = 1$ и аналогичных для $n' = N$.

Общая схема решения задачи состоит в осуществлении следующих этапов. (1): Переход на новый временной слой t^{k+1} начинается с расчета температуры на основной сетке (n, m, l) для этапа конвекции и с помощью, например, метода стабилизирующей поправки [5] на этапе диффузии. (2): При найденном распределении температуры осуществляется расчет компонент конвективной скорости и компонент ротора конвективной скорости на вспомогательных сетках. (3): Вычисляются составляющие компоненты диффузионного вихря (первое слагаемое в представлении (1)) по схеме (2). На каждом k -м временном слое расчета вводится внутренний итерационный процесс расчета компонент векторного потенциала по схеме (3) с соответствующими граничными условиями. После окончания итераций при $s = S$ считается, что с заданной точностью ε_ψ определены значения компонент векторного потенциала на $(k + 1)$ -м временном слое. Окончательно, с использованием представления (1), будут вычислены и компоненты диффузионного вихря. (4): При переходе на следующий временной слой (к этапу (1)) насчитывается искомая диффузионная скорость. Итерационный процесс для компоненты векторного потенциала считается сошедшимся, если выполнен критерий сходимости следующего вида [2, 10]: $\max_{n,m,l} |\psi_{n,m,l}^{s+1} - \psi_{n,m,l}^s| < \varepsilon_\psi \cdot \max_{n,m,l} |\psi_{n,m,l}^{s+1}|$. Здесь s — номер итерации, ε_ψ — заданная точность расчета ψ^{s+1} .

3. Результаты численного анализа

Тестирование метода расщепления по физическим процессам в трехмерных задачах проводится на известных задачах о свободной конвекции в кубической полости или параллелепипеде при подогреве одной грани [13, 14, 15] (см. также [10]).

Предложенный метод расщепления для решения трехмерных задач конвекции проверяется на тесте о свободной конвекции в замкнутой кювете $\Omega = \{[0, x_0] \times [0, y_0] \times [0, z_0]\}$ при подогреве одной грани $x = x_0$ и теплоизоляции остальных: $T = 0$ при $x = 0$, $T = 1$ при $x = x_0$, $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ при $y = 0$, $y = y_0$, $z = 0$, $z = z_0$. При этом осуществляется контроль над безразмерными тепловыми потоками на изотермической холодной или нагретой стенке, которые определяются числами Нуссельта

$$Nu_{ov} = \frac{1}{y_0 z_0} \int_0^{z_0} Nu_{mean}(z) dz, \quad Nu_{mean}(z) = \int_0^{y_0} Nu_{loc}(y, z) dy, \quad Nu_{loc}(y, z) = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}}$$

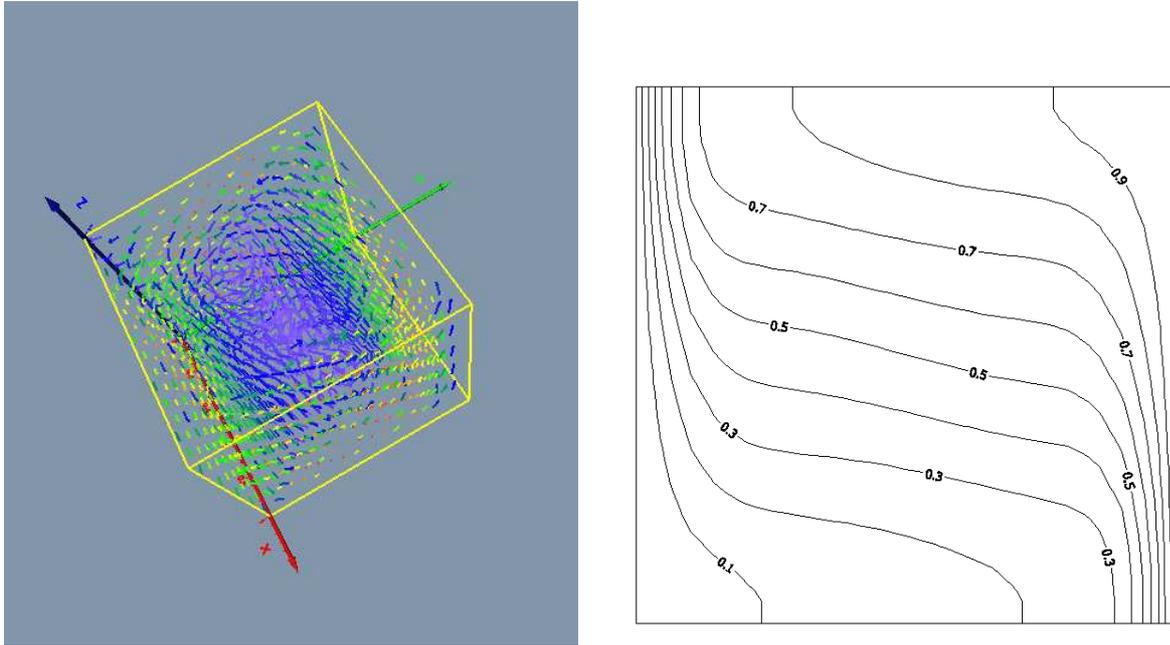


Рис. 1. Поле скоростей (слева). Поле температуры (справа)

и $\bar{x} = 0$ или $\bar{x} = x_0$. Аппроксимации второго порядка для производной температуры T на границе используются при вычислении Nu_{loc} . Тест состоит в достижении стационарного решения.

Представим результаты тестовых расчетов для задачи 1 (см. [10]): сила тяжести направлена против оси Oy , а область Ω представляет собой куб, размеры которого определяются значениями $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$; при тестировании полагается $\bar{x} = x_0$, $Gr = 10^5$, $Pr = 1$, $Re = 1$. Сравнение расчетов с известными результатами представлено в таблице 1.

Таблица 1.

цитир.	сетка	Nu_{ov}
[13]	$86 \times 65 \times 65$	4.34
[15]	$62 \times 62 \times 62$	4.36
наст. работа	$81 \times 81 \times 81$	4.6342

Поле скоростей представлено на Рис. 1 (слева). Изолинии температуры в плоскости $z = z_0/2$ представляют собой типичную картину для поля температуры в двумерном случае (см. Рис.1 (справа), на рисунке представлены изотермы в плоскости $z = z_0/2$; по горизонтали — ось Ox , по вертикали — ось Oy). Расчеты ведутся на сетках $21 \times 21 \times 21$, $41 \times 41 \times 41$, $81 \times 81 \times 81$ с шагом по времени (фиктивному времени) $\tau = 0.0001$. Условием выхода на стационарный режим является выполнение неравенства $|Nu_{ov}^{k+1} - Nu_{ov}^k| < \varepsilon_{Nu}$. При этом, $\varepsilon_{Nu} = 10^{-5}$, $\varepsilon_{\psi} = 10^{-4}$. Устойчивость алгоритма и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверяется путем вычислительных экспериментов на последовательности сеток.

4. Заключение.

На основе метода расщепления по физическим процессам представлен численный алгоритм расчета трехмерных задач конвекции в областях типа параллелепипеда и тестовые расчеты. Данный метод обобщается на области с произвольными, достаточно гладкими границами, а также на случай зависимости коэффициентов переноса, например, от температуры. Представлены численные алгоритмы расчета двумерных задач конвекции с криволинейными границами и результаты численного моделирования.

Список литературы

- [1] ДЖОЗЕФ Д. Устойчивость движений жидкости: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 196 с.
- [2] РОУЧ П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1975. 616 с.
- [3] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосибирск: Наука, 1967. 196 с.
- [4] САМАРСКИЙ А.А. О принципе аддитивности для построения экономичных разностных схем // ДАН СССР. 1965. Т. 165, № 6. С. 1253–1256.
- [5] МАРЧУК Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988. 264 с.
- [6] БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ О.М., ГУЩИН В.А., ЩЕННИКОВ В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислит. математики и матем. физики. 1975. Т. 15, № 1. С. 197–207.
- [7] КОВЕНЯ В.М., СЛЮНЯЕВ А.Ю. Схемы оптимального расщепления для решения уравнений Навье - Стокса // Проблемы и достижения прикл. математики и механики: Сб. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теор. и прикл. механики. 2010. С. 66-75.
- [8] ВОЕВОДИН А.Ф., ПРОТОПОПОВА Т.В. Метод расчёта вязких течений в замкнутых областях // Сиб. журн. индустриальной математики. 2001. Т. 4, № 1. С. 29–37.
- [9] ВОЕВОДИН А.Ф., ГОНЧАРОВА О.Н. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 5. С. 90–96.
- [10] ВОЕВОДИН А.Ф., ГОНЧАРОВА О.Н. Метод расщепления по физическим процессам для расчета задач конвекции // Вычисл. технологии. 2009. Т. 14, № 1. С. 21–33.
- [11] БЕЛОЛИПЕЦКИЙ В.М., КОСТЮК В.Ю., ШОКИН Ю.И. Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука, 1991. 176 с.
- [12] ВОЕВОДИН А.Ф., ШУГРИН С.М. Численные методы решения одномерных систем. Новосибирск: Наука, 1981. 368 с.
- [13] БЕССОНОВ О.А., БРАЙЛОВСКАЯ В.А., НИКИТИН С.А., ПОЛЕЖАЕВ В.И. Тест для численных решений трехмерной задачи о естественной конвекции в кубической полости // Математическое моделирование. 1999. Т. 11, № 12. С. 51–58.
- [14] DAVIS G. DE VANL. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution // Int. J. Numer. Methods Fluids, 1983. Vol. 3. P. 249–264.
- [15] МЫЗНИКОВА Б.И., ТАРУНИН Е.Л. Процессы установления стационарных конвективных течений в кубической полости при подогреве снизу // Нестационарные процессы в жидкостях и твердых телах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983, с. 20–29.