

Численное моделирование сдвиговых трещин вблизи отверстий

О.П. БУШМАНОВА, С.Б. БУШМАНОВ, А.В. УСТЮЖАНОВА
Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
e-mail: bush@asu.ru

We present the numerical analysis of mode of deformation for elastic-plastic material with shear cracks near the holes. We simulate the process of shear localization on systems of cuts in a plane domain. The number of shear cracks, their shape, and positions in the domain are given taking into the consideration the experimental or theoretical studies. Within the framework of successive loading method, we set the problem of finding the fields of displacement increments and stress increments at each loading step in the given domain. The algorithm of numerical solution of the posed problem is constructed on the basis of the finite element method. An important feature of the involved problem-oriented finite element grids is that all their nodes are double nodes. This allows us to locate the cuts along different families of grid lines. The developed computational algorithm can be applied to research the interference of shear cracks and holes in the loaded material at the stage of failure.

Введение

Процессы формирования изолированных поверхностей локализации сдвигов, в том числе и сдвиговых трещин, достаточно часто можно наблюдать при деформировании металлов, сыпучих сред, горных пород, грунтов [1–4]. Для исследования концентрации напряжений в окрестности отверстий и трещин применяются различные аналитические и численные методы [5–9].

В настоящей работе численный анализ напряженно-деформированного состояния в упруго-пластическом материале в условиях локализации сдвигов вблизи отверстий проводится на основе алгоритмов и программ, позволяющих моделировать возникновение и распространение разрывов перемещений в плоской области вдоль разрезов криволинейной формы [10, 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о деформировании ослабленной отверстиями плоской упруго-пластической области в условиях возможности возникновения и развития в окрестности отверстий трещин сдвига.

При постановке и решении задачи будем использовать метод последовательных нагружений. На каждом шаге нагружения ставится задача определения полей приращений перемещений и приращений напряжений в области при заданных условиях на границе. Перемещения и напряжения в начальный момент времени считаются известными.

В этом случае бесконечно малое приращение деформаций $d\varepsilon_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) в исследуемой области может быть представлено в виде суммы упругой $d\varepsilon_{ij}^e$ и пластической $d\varepsilon_{ij}^p$ составляющих

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (1)$$

Приращения деформаций определяются через du_i – вектор приращений перемещений точки с текущим радиусом-вектором x_i

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} (du_j) \right].$$

Упругая составляющая приращений деформаций определяется через приращения напряжений $d\sigma_{ij}$ по закону Гука

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{ds_{ij}}{2G} + (1 - 2\nu)\delta_{ij} \frac{d\sigma}{E}, \quad (2)$$

где ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости, G – модуль сдвига, $d\sigma$ – приращение среднего давления, ds_{ij} – девиатор тензора приращений напряжений

$$d\sigma = \frac{d\sigma_{mm}}{3}, \quad ds_{ij} = d\sigma_{ij} - \delta_{ij}d\sigma, \quad (m = 1, 2, 3).$$

Для описания пластического поведения материала используются функция текучести $f(\sigma_{ij})$ и пластический потенциал $g(\sigma_{ij})$ [12–14]

$$f(\sigma_{ij}) = T + \mu\sigma - \kappa, \quad g(\sigma_{ij}) = T + \beta\sigma,$$

где

$$T = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{mm}}{3}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma.$$

Параметры μ , β и κ характеризуют, соответственно, внутреннее трение, дилатансию и сцепление или предел текучести при сдвиге.

В этом случае возникновение пластических деформаций в материале обусловлено критерием

$$T = -\mu\sigma + \kappa. \quad (3)$$

Пластическая составляющая приращений деформаций связана с приращениями напряжений следующим образом

$$hd\varepsilon_{ij}^p = P_{ij}Q_{kl}d\sigma_{kl}, \quad (4)$$

где h – скорость упрочнения,

$$P_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\beta\delta_{ij}, \quad (5)$$

$$Q_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2T} + \frac{1}{3}\mu\delta_{ij}. \quad (6)$$

Уравнения состояния для упруго-пластического поведения материала выводятся на основе соотношений (1), (2), (4).

Для моделирования трещин сдвига используются разрезы криволинейной формы. Число трещин сдвига, их форма и расположение в области задаются с учетом экспериментальных или теоретических исследований. Уравнения состояния в зоне локализации сдвигов заменяются условиями на разрезах, обеспечивающими возможность возникновения разрывов касательных перемещений.

Условия, описывающие взаимодействие берегов разрезов, имеют вид функциональных зависимостей между нормальными и касательными компонентами векторов приращений напряжений и приращений перемещений на берегах разрезов.

На площадках касательного разрыва перемещений вектор напряжений непрерывен. Поэтому на разрезах отсутствуют разрывы (скачки) нормальной $[d\sigma_n]$ и касательной $[d\sigma_\tau]$ компонент вектора приращений напряжений

$$[d\sigma_n] = 0, \quad [d\sigma_\tau] = 0. \quad (7)$$

Возможность скольжения на определенных участках разрезов реализуется при выполнении условия трения Кулона, связывающего нормальную и касательную составляющие вектора приращений напряжений

$$|d\sigma_\tau| + \alpha_i d\sigma_n = c_i, \quad (8)$$

где α_i – коэффициент трения на i -м разрезе, c_i – параметр, зависящий от сцепления и истории нагружения ($i = 1, \dots, N$).

Возникновение разрыхления материала при скольжении вдоль разреза описывается зависимостью между скачками нормальной $[du_n]$ и касательной $[du_\tau]$ компонент вектора приращений перемещений на заданных участках разрезов

$$[du_n] = \lambda_i [du_\tau], \quad (9)$$

где λ_i – коэффициент пропорциональности.

На участках разрезов, вдоль которых не возникает разрывов приращений перемещений, наряду с условиями (7), должны выполняться условия

$$[du_n] = 0, \quad [du_\tau] = 0. \quad (10)$$

2. Численный алгоритм

Алгоритм численного решения поставленной задачи строится на основе метода конечных элементов [15]. Особенностью разработанного алгоритма является замена стандартных конечно-элементных сеток проблемно-ориентированными адаптивными сетками с двойными узлами. Расположение разрезов вдоль линий таких сеток позволяет рассматривать ненулевые скачки приращений перемещений для любых расчетных точек области.

При получении основной системы конечных элементов, компоненты тензоров приращений деформаций $\{d\varepsilon\}$ и приращений напряжений $\{d\sigma\}$ в каждом конечном элементе записываются в векторной форме

$$\begin{aligned} \{d\varepsilon\} &= \{d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{33}, 2d\varepsilon_{12}, 2d\varepsilon_{13}, 2d\varepsilon_{23}\}^T, \\ \{d\sigma\} &= \{d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{33}, d\sigma_{12}, d\sigma_{13}, d\sigma_{23}\}^T. \end{aligned}$$

В этом случае закон Гука (2) принимает вид

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon^e\}, \quad (11)$$

где $[D]$ – матрица упругих констант.

Аналогично представляются и приращения пластических деформаций (4)

$$\{d\varepsilon^p\} = h^{-1}\{P\}\{Q\}^T\{d\sigma\}, \quad (12)$$

где векторы $\{P\}$ и $\{Q\}$ определяются на основе формул (5), (6).

Соотношение (1) принимает вид

$$\{d\varepsilon\} = [D]^{-1}\{d\sigma\} + h^{-1}\{P\}\{Q\}^T\{d\sigma\}. \quad (13)$$

Таким образом, получаем выражение, связывающее приращения напряжений с приращениями деформаций

$$\{d\sigma\} = [D]^{ep}\{d\varepsilon\}, \quad (14)$$

где

$$[D]^{ep} = [D] - \frac{[D]\{P\}\{Q\}^T[D]}{h + \{Q\}^T[D]\{P\}}. \quad (15)$$

3. Результаты расчетов

Численное решение поставленной задачи проводилось для плоских областей, ослабленных системами отверстий и трещин различной формы.

В частности, на основе известных экспериментальных данных и решений в рамках классических пластических моделей [1, 2], исследовалось напряженно-деформированное состояние материала в окрестности круглого отверстия в условиях локализации сдвигов на системах разрезом, расположенных как вдоль одного, так и вдоль двух семейств логарифмических спиралей [16, 17].

В работе [18] рассматривалось деформирование упругой прямоугольной области с прямолинейными трещинами вблизи систем из двух или трех круговых отверстий.

Полученные в ходе численного решения кинематические картины деформирования качественно повторяют соответствующие картины, наблюдаемые в экспериментах.

На рисунке представлены изолинии функции текучести для прямоугольной области с четырьмя отверстиями круглой формы и двумя сдвиговыми трещинами.

Все величины в задаче являются безразмерными. В качестве характерного линейного размера выбран горизонтальный размер прямоугольника, в качестве характерного напряжения – $10^{-2}E$.

При расчетах принимались следующие значения параметров: $\nu = 0.3$, $\kappa = 2.4$, $c_i = 0$, $\alpha_i = 0.27$, $\lambda_i = 0$, $\beta = \mu = 0$.

Краевые условия включали в себя заданные на границе прямоугольника нормальные компоненты вектора перемещений ($u_1 = 0.0028$ при $x_2 = 0$; $u_1 = -0.0028$ при $x_2 = 1$; $u_2 = 0$ при $x_1 = 0$; $u_2 = -0.028$ при $x_1 = 1.02$).

Касательное напряжение на всей границе прямоугольника, напряжения на границах отверстий, а также напряжения и перемещения в исследуемой области в начальный момент времени предполагались нулевыми.

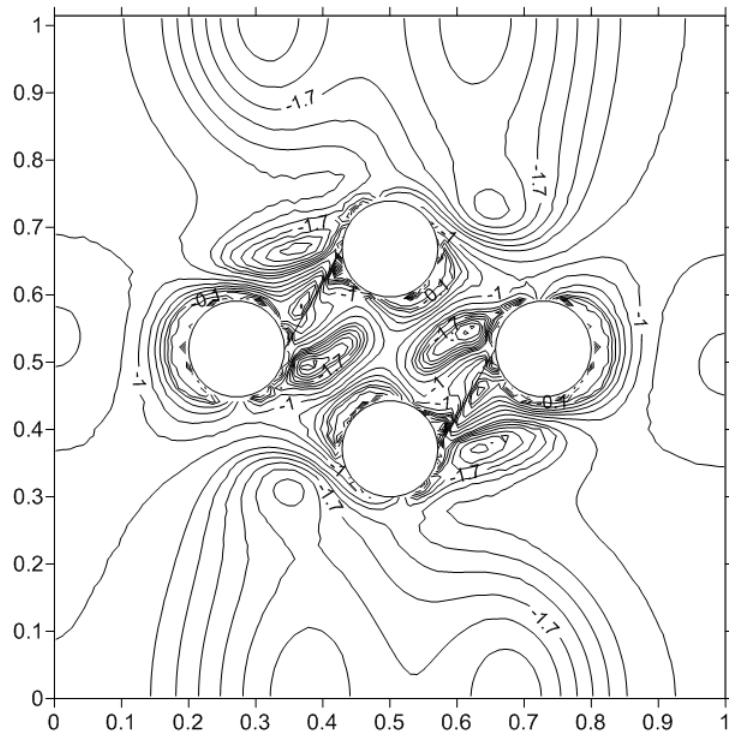


Рис. 1. Изолинии функции текучести

Численный анализ напряженно-деформированного состояния упруго-пластических материалов показывает, что локализация сдвигов на трещинах приводит к уменьшению размеров пластических областей в окрестности отверстий.

Построенный численный алгоритм может применяться для исследования взаимного влияния сдвиговых трещин и отверстий на стадии разрушения в нагруженном материале.

Список литературы

- [1] НАДАИ А. Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Мир, 1969. Т. 2. 863 с.
- [2] СОКОЛОВСКИЙ В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [3] РЕВУЖЕНКО А.Ф. Механика сыпучих сред. Новосибирск: ОФСЕТ, 2003. 373 с.
- [4] ГОЛЬДШТЕЙН Р.В., КУЛИНИЧ Ю.В., ОСИПЕНКО Н.М. Разрушение горных пород вблизи отверстия при сжатии. М., 2005 (Препр. РАН. ИПМех. №778).
- [5] МУСХЕЛИШВИЛИ Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [6] САВИН Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 891 с.
- [7] САВРУК М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наукова думка, 1981. 324 с.
- [8] КРАУЧ С., СТАРФИЛД А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.

- [9] СИРАТОРИ М., МИЕСИ Т., МАЦУСИТА Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 334 с.
- [10] БУШМАНОВА О.П. Моделирование локализации сдвигов // ПМТФ. 2003, №6. С. 164–169.
- [11] БУШМАНОВА О.П., БУШМАНОВ С.Б. Численное моделирование процесса деформирования материала в сходящемся канале в условиях возникновения линий локализации // ФТПРПИ. 2009, № 4. С. 33–39.
- [12] ХИЛЛ Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956. 408 с.
- [13] РАЙС ДЖ.Р. Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика. Тр. III Международного конгресса IUTAM. М.: Мир, 1979. С. 439–471.
- [14] ДРУККЕР Д., ПРАГЕР В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С. 166–177.
- [15] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L. The Finite Element Method. Butterworth-Heinemann. 2000, V. 2. 459 p.
- [16] БУШМАНОВА О.П., РЕВУЖЕНКО А.Ф. Напряженное состояние породного массива вокруг выработки в условиях локализации сдвигов // ФТПРПИ. 2002, № 2. С. 18–26.
- [17] БУШМАНОВА О.П., БУШМАНОВ С.Б., УСТЮЖАНОВА А.В. Математическое моделирование локализации пластических сдвигов в окрестности круглого отверстия // Известия АлтГУ. 2010, № 1, С. 18–21.
- [18] БУШМАНОВА О.П., УСТЮЖАНОВА А.В. О математическом моделировании сдвиговых трещин вблизи отверстий // Известия АлтГУ. 2010, № 1, Т. 2, С. 20–23.