

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ И ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ*

С.Н.Яковенко^{1,2}

¹ Институт теоретической и прикладной механики им. С.А.Христиановича, Новосибирск

² Новосибирский государственный университет, Новосибирск

MODELING OF EVOLUTION OF RAYLEIGH–TAYLOR INSTABILITY IN STRATIFIED AND TWO-PHASE MEDIA

S.N.Yakovenko^{1,2}

¹ Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk

² Novosibirsk State University, Novosibirsk

Rayleigh–Taylor instability has been studied for two-phase system of immiscible fluids and single-phase stratified medium by means of direct numerical simulations of Navier–Stokes equations. Results of studies allow us to analyze mechanisms of instability development and structure of arising turbulence in engineering and environmental problems.

Введение

Неустойчивость Рэлея–Тейлора (НРТ) возникает при наложении малых возмущений на поверхность раздела между слоями тяжелой (сверху) и легкой (снизу) сред. Явления НРТ наблюдаются от астрономических масштабов (Крабовидная туманность) до наномасштабов. Распространение межзвездного газа, выталкиваемого из плоскости галактики магнитными полями и космическими лучами, может происходить по сценарию НРТ. Подобные процессы имеют место при вспышке сверхновых, в различных природных и искусственных объектах с термоядерным синтезом, при пожаре и управляемых реакциях горения, в мантии, океанах и атмосфере Земли, заметно влияя на климат. Одним из эффектов НРТ является возникновение турбулентности и интенсификация смешения за счет конвективного переноса. В недавних конференциях по турбулентному смешению эффектам НРТ уделено существенное внимание [1]. Другим примером интереса научного сообщества к этой актуальной проблеме является сотрудничество крупнейших мировых центров по численному исследованию НРТ [2]. Наиболее мощный из известных расчетов трехмерной НРТ [3] был выполнен в кубической области вычислений с 3072^3 узлами, для чего потребовалось более двух недель счета и 65536 процессоров (т.е. полная мощность IBM BlueGene/L, крупнейшего суперкомпьютера США).

Тем не менее, предшествующие экспериментальные и численные исследования НРТ, в основном, были реализованы в упрощенной (классической) постановке с двумя плоскими слоями несмешивающихся сплошных сред или в стратифицированной среде с линейным или ступенчатым профилем плотности (см., напр., [4]). Поэтому представляет интерес изучение эволюции НРТ в условиях, приближенных к реальным течениям техники и окружающей среды. В частности, при обрушении внутренних волн обнаружены [5] нелинейные эффекты НРТ, которые фактически служат причиной перехода к турбулентности. В настоящей работе представлены результаты прямого численного моделирования уравнений Навье–Стокса для упомянутого случая НРТ в устойчиво стратифицированном течении над препятствием и для эволюции возмущенной поверхности раздела между двумя слоями несмешивающихся сред различной плотности (в том числе, вода–воздух).

Основные уравнения и методы моделирования

Стратифицированные течения моделируются в приближении Буссинеска, и для учета члена плавучести в уравнениях Навье–Стокса вводится уравнение отклонения плотности [5]. Разрешение поверхности раздела (ПР) двух несмешивающихся сред достигается при помощи уравнения функции объемной фракции f более тяжелой среды [6] и неразрывной модели

* Работа поддержана грантами EPSRC (# EP/C008561/1), РФФИ (№ 09-05-00004-а) и Междисциплинарным интеграционным проектом СО РАН (№ 23 за 2009 г.).

поверхностного натяжения (continuum surface force, CSF), модифицированной в [7]. С целью аппроксимации адвективных членов f -уравнения верифицированы различные численные алгоритмы, в частности, MUSCL-схема [8] с QUICK-интерполянтами и TVD-ограничителями (обозначенная как $s4mm$ в [7]). В модификации CSF-модели сглаживание функции объемной фракции поперек ПР происходит за счет свертки исходной функции со сглаживающей функцией ядра – полинома восьмого порядка, сформулированного для плоских течений.

Задачи разрешения ПР между двумя несмешивающимися средами

Некоторые результаты верификации развитых методов при численном решении задач обрушения плотины [6] и неустойчивости Рэля–Тейлора [7] приведены на рис.1-3.

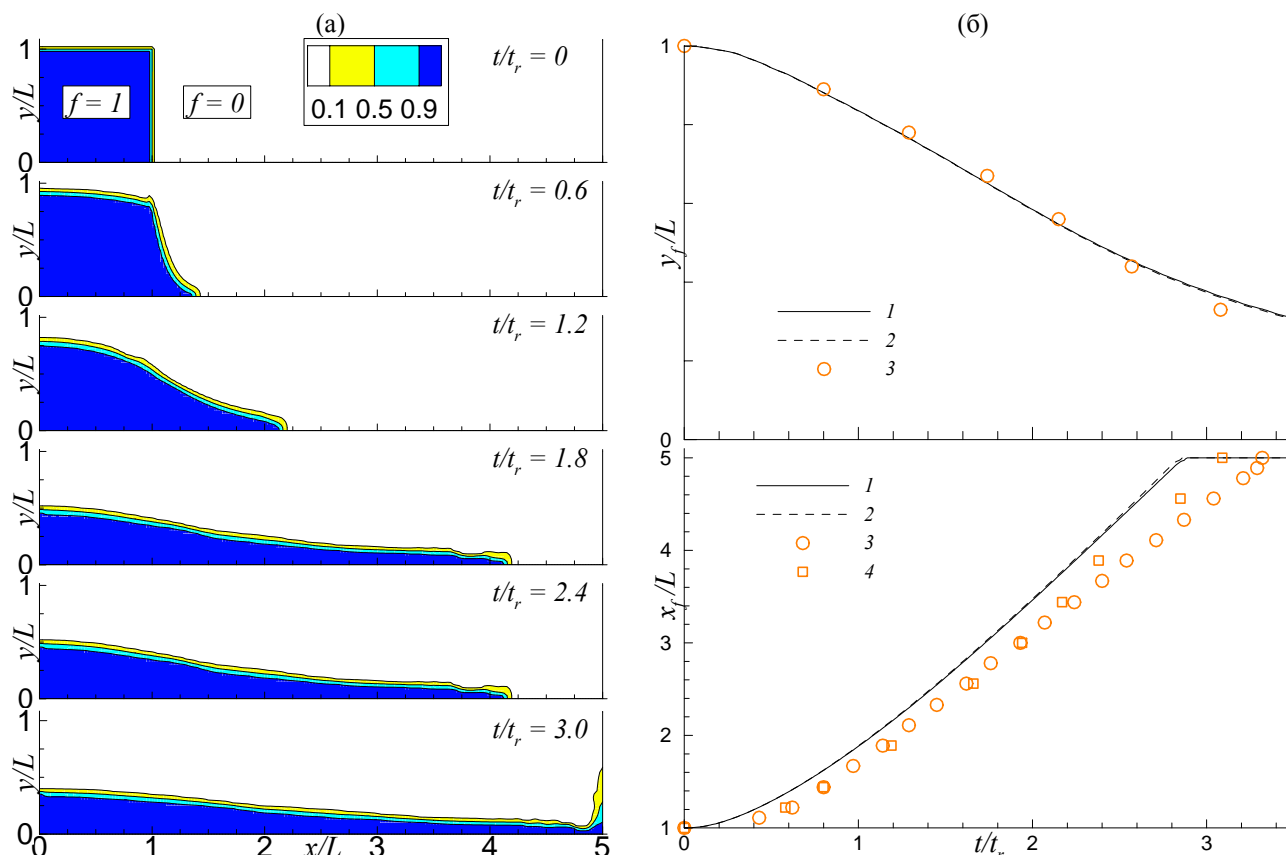


Рис. 1. Эволюция свободной поверхности в задаче обрушения плотины: (а) изолинии объемной фракции воды ($f = 0.9, 0.5, 0.1$), $t_r = (L/g)^{1/2}$; (б) высота столба воды и положение переднего фронта в зависимости от времени (1 и 2 – расчет [6] при $Re = 43130$ и 121990 , 3 и 4 – эксперимент [9] при $Re = 43130$ и 121990 , соответственно).

При эволюции НРТ среднее значение y_f амплитуд ПР на правой и левой сторонах области расчета (рис.2) сначала растет по экспоненте, соответствуя линейной устойчивости с постоянной скоростью $n = d(\ln y_f)/dt$, возрастающей при увеличении числа Рейнольдса. Безразмерная скорость роста $n^* = n(v/g^2)^{1/3}$ показывает немонотонное поведение в полном согласии с теоретическими оценками [10] (и лучше, чем было получено в расчетах [8] с той же схемой адвекции $s4mm$). Величина n рассчитывалась как приращение $\ln y_f$ на отрезке $-3 \leq \ln(y_f/L) \leq -2$, где этап линейной устойчивости реализуется наиболее отчетливо (рис.3а).

Поверхностное натяжение, как и вязкость, дает эффект демпфирования в соответствии с данными теории, а развитый алгоритм – существенное уточнение по сравнению с данными других расчетов (рис.3). Функцию сглаженной объемной фракции в CSF-модели можно взять в первом приближении равной исходной функции (без свертки со сглаживающей функцией ядра), найденной численно, в связи с возможным размазыванием за счет численных схем. Но в таком случае («простая» CSF-модель на рис.3) не удастся воспроизвести демпфирующий эффект, усиливающийся с ростом коэффициента поверхностного натяжения σ , в отличие от

модифицированной CSF-модели, сформулированной в [7]. В расчетах по схеме c4mm полное подавления роста НРТ происходит при $\sigma = 4.08 \cdot 10^5$, а в случае VOF-метода вместо схемы c4mm в уравнении объемной фракции [7] – при $\sigma = 4.18 \cdot 10^5$. Теория дает близкое значение критического коэффициента, $\sigma = 4.05 \cdot 10^5$, соответствующее параметру устойчивости $\Phi = 1$.

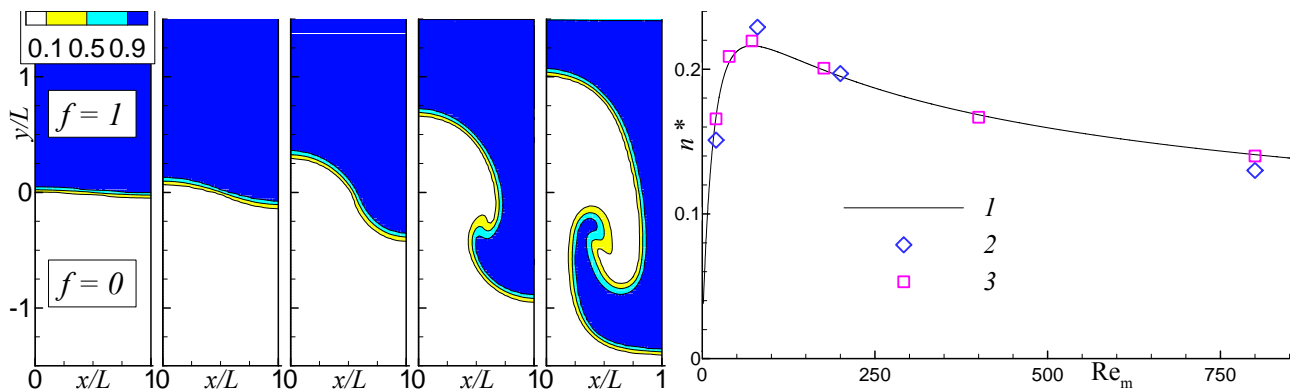


Рис. 2. НРТ при $a = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2) = 0.333$, $\rho_1 = 2\rho_2 = 2$, $v_1 = v_2$, $g = 1$, $L = 0.02$, $\sigma = 0$ [7,8]. Слева направо – изолинии объемной фракции ($f = 0.9, 0.5, 0.1$) тяжелой среды с плотностью $\rho_1 = 2$ при $Re_m = (8gL^3)^{1/2}/v_1 = 400$ и $t/t_r = 1.6, 3.2, 4.8, 6.4, 8.0$; справа – безразмерная скорость роста НРТ в зависимости от числа Рейнольдса (1 – линейная теория [10], 2 – расчет [8] по схеме c4mm, 3 – настоящий расчет [7] по схеме c4mm).

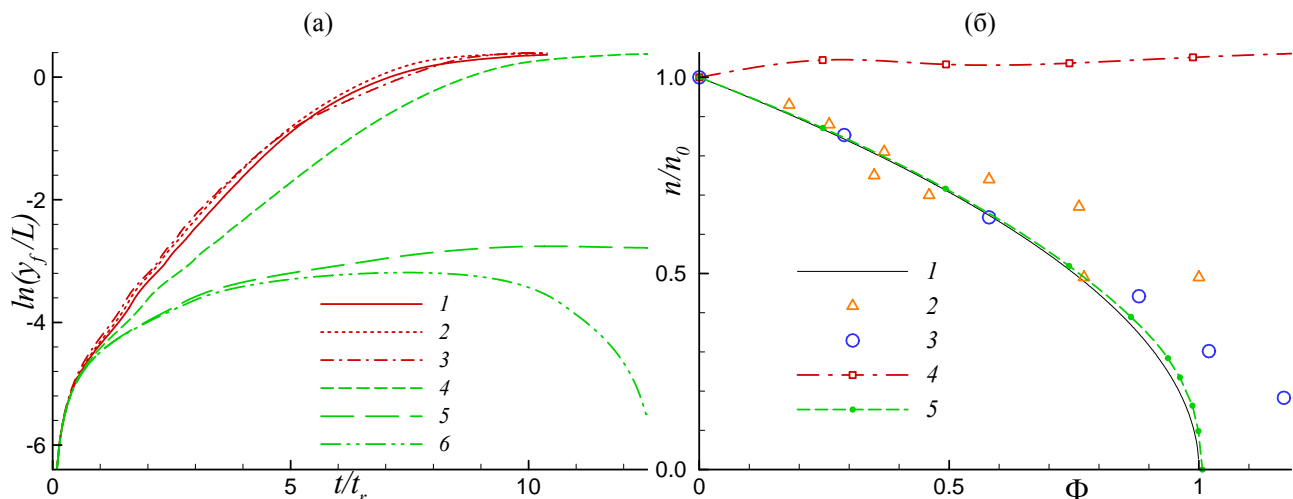


Рис. 3. НРТ при $Re_m = 400$; $\rho_1 = 2\rho_2$; $v_1 = v_2$; $g = 1$ с учетом поверхностного натяжения: (а) Логарифм y_f в расчетах со схемой c4mm, по «простой» CSF-модели (1, 2, 3 – при $T \equiv \sigma \cdot 10^5 = 0, 1.0, 5.0$, соответственно), по модифицированной CSF-модели (4, 5, 6 – при $T = 2.00, 4.08, 4.20$, соответственно); (б) относительная скорость роста НРТ в зависимости от параметра устойчивости $\Phi = \pi^2 \sigma / [(\rho_2 - \rho_1)gL^2]$ (где $n \equiv d(\ln y_f)/dt = n(\Phi)$ находится на этапе линейной устойчивости, $n_0 = n(\Phi = 0)$); 1 – линейная теория [10], 2 – измерения [11], 3 – расчет по оригинальной CSF-модели [12], 4 и 5 – настоящий расчет по «простой» и модифицированной CSF-модели).

Для реальных сред (вода-воздух) в расчетах по модифицированной CSF-модели и схеме c4mm для адвективных слагаемых в уравнениях Навье-Стокса и объемной фракции хорошо воспроизводятся (рис.4) и этап линейной устойчивости, и нелинейная стадия с насыщением скорости роста НРТ. Если перепад плотности сред невелик, то на вертикальных участках ПР в нелинейной стадии наблюдаются неустойчивость Кельвина-Гельмгольца и характерные грибо-образные структуры ($t/t_r > 5$, рис.2). При большом скачке плотности эти эффекты отсутствуют, и более тяжелая среда глубоко проникает в легкую, образуя высокие колонны ($t/t_r > 3$, рис.4), как и в [14,15]. Неучет эффекта поверхностного натяжения (т.е. CSF-модель, где $\sigma = 0$) дает ускорение роста и ложное искажение ПР, затем ее фрагментацию, которая при больших числах Рейнольдса происходит раньше. «Простая» CSF-модель, в которой функция сглаженной объемной фракции (в надежде на сглаживание за счет численных схем при дискретизации исходных дифференциальных уравнений) просто взята равной исходной функции, т.е. без свертки со сглаживающей функцией ядра, не приводит к фрагментации или

искажению ПР, но также завышает скорость роста НРТ. С другой стороны, метод вихревой пелены (vortex sheet, VS) [15], не учитывающий вязкость, ведет к занижению скорости и работает весьма ограниченный отрезок времени, после которого растущие нерегулярности ПР не позволяют численно реализовать дальнейшую эволюцию НРТ.

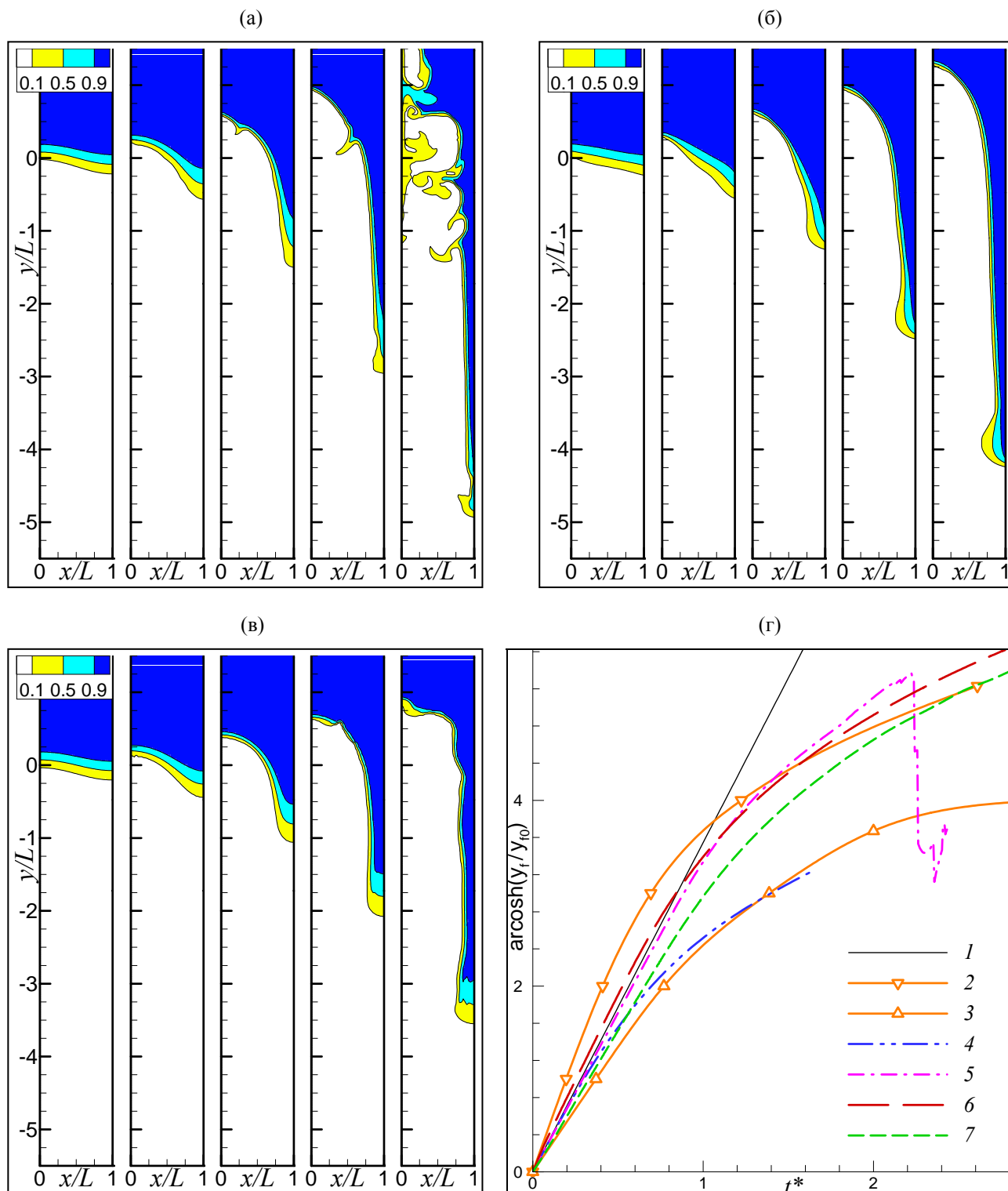


Рис. 4. НРТ в системе вода-воздух (в условиях опыта [14] при $a = 0.998$, $L = 0.01$ м, $g = 200$ м/с², $Re_m = 4 \cdot 10^4$) в виде изолиний объемной фракции воды ($f = 0.9, 0.5, 0.1$), вычисленных при $t/t_r = 0.8, 1.6, 2.4, 3.2, 4.0$ (а) при $\Phi = 0$, (б) по «простой» CSF-модели при $\Phi = 0.2$, (в) по модифицированной CSF-модели при $\Phi = 0.2$; (г) относительная величина амплитуды ПР в зависимости от времени (1 – линейная теория [13], 2 и 3 – верхний и нижний пределы разброса данных измерений [14], 4 – расчет [15] по VS-методу, 5, 6 и 7 – настоящий расчет при $\Phi = 0$, по «простой» и модифицированной CSF-модели при $\Phi = 0.2$, соответственно). Неучет поверхностного натяжения ($\Phi = 0$) приводит к фрагментации ПР при $t^* = t(0.25ga/L)^{1/2} > 2.24$.

Модифицированная версия CSF-модели [7] корректно описывает рост относительной амплитуды ПР в пределах разброса данных лабораторных экспериментов [14] (рис.4г). Нерегулярности ПР на нелинейном этапе ($t/t_r > 3$, рис.4в), по-видимому неизбежные при высоких числах Рейнольдса (см. также в [15]), не создают проблем реализации в моменты времени, соответствующие опытным данным, в отличие от расчетов VS-методом в [15].

Отметим, что в расчетах НРТ, результаты которых обсуждаются выше, использованы не только различные физические параметры вычислений и высота расчетной области, но и разные начальные условия. В частности, для идеализированного случая с $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$ в [7] (рис.2-3) на плоской ПР, как и в [8], вводится малое возмущение с длиной волны $\lambda = 2L$ за счет задания во всей расчетной области (x, y) высотой $3L$ с шагом сетки $\delta = L/40$ исходного распределения вертикальной скорости $V(x,y) = A \cdot \cos(\pi x/L) \exp(-\pi|y|/L)$, где $A = 0.025 \cdot \pi \delta/L$. При этом начальные поля горизонтальной скорости U , функции объемной фракции f и давления p имеют вид: $U(x,y) = A \cdot \sin(\pi x/L) \exp(-\pi|y|/L)$, $f(x,y) = 1$, $p(x,y) = -\rho_1 g y$ для более тяжелой среды (при $y > 0$); $U(x,y) = -A \cdot \sin(\pi x/L) \exp(-\pi|y|/L)$, $f(x,y) = 0$, $p(x,y) = -\rho_2 g y$ для более легкой среды (при $y < 0$) и $f(x,y) = 0.5$ в узкой переходной области между двумя средами (при $y = 0$). Начальное распределение давления соответствует гидростатическому, а отрицательные значения давления не создают дополнительных проблем в вычислениях, поскольку в уравнениях Навье-Стокса присутствуют только градиенты давления.

При численном моделировании НРТ в реальных средах с плотностями $\rho_1 = 10^3 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 1.2 \text{ кг/м}^3$ (вода-воздух) при большем числе Рейнольдса $Re_m = 40\,000$ (рис.4), начальная скорость полагается равной нулю, а начальное положение ПР описывается, как и в [13-15], выражением $y_s = y_{s0} \cdot \cos(\pi x/L)$, соответствующим возмущению с длиной волны $\lambda = 2L$ и малой амплитудой $y_{s0} = 0.04L$, приблизительно равной амплитуде в [14,15]. Тогда исходное распределение функции объемной фракции имеет вид: $f(x,y) = 1$ для воды (при $y > y_s$); $f(x,y) = 0$ для воздуха (при $y < y_s$) и $f(x,y) = 0.5$ в узкой переходной области между двумя средами (при $y = y_s$), а начальное распределение давления соответствует гидростатическому. Высота области расчета при этом увеличена до $15L$, чтобы при нелинейной стадии колонны более тяжелой среды (струи воды) смогли проникнуть глубоко вниз в легкую среду (воздух).

Эволюция внутренних волн в стратифицированном течении с препятствием

При моделировании [5] обрушения внутренних волн в устойчиво стратифицированном потоке, набегающем с постоянной скоростью U на двумерное препятствие (холм) высотой h , в некоторых локализованных областях также возникают неустойчивые слои с резким перепадом плотности. В поле плотности вводится малое возмущение типа «белого шума», и в некоторый момент появляются грибоподобные структуры, указывающие на нелинейную стадию развития НРТ в зоне опрокидывания внутренних волн (рис.5). Эти конвективные структуры аналогичны наблюдаемым на ПР несмешивающихся сред (рис.2) и приводят к образованию хорошо перемешанной квазистационарной области развитой турбулентности, в которой вертикальные градиенты плотности (осредненной по y) становятся малыми.

В [16] предложен следующий сценарий эволюции НРТ. При наличии возмущений с разными длинами волн на первой стадии после нескольких периодов $\tau_m = 1/n_m$ остается возмущение, соответствующее наиболее неустойчивой длине волны $\lambda_m \approx 4\pi v^{2/3} (ga)^{-1/3}$, где $v = (v_1 \rho_1 + v_2 \rho_2) / (\rho_1 + \rho_2)$, и возрастающее экспоненциально со скоростью $n_m \approx (\pi ga / \lambda_m)^{-1/3}$ [13]. Когда амплитуда возмущения достигает $\sim \lambda_m/2$, его дальнейший рост замедляется (т.е. имеет место эффект насыщения). Более длинноволновые возмущения начинают расти быстрее, и появляются структуры все большего и большего масштаба. Если исходное возмущение мало, подобные структуры возникают в результате нелинейных взаимодействий более мелких структур, а не напрямую из исходного возмущения, и в конце второй стадии (когда длина волны доминирующих структур λ_d достигает примерно $10\lambda_m$) память о начальных условиях утрачивается. На последней стадии доминирующая длина волны может расти (насколько позволяют натурные условия или ограничения в численных/физических экспериментах) от $10\lambda_m$ до бесконечности. В настоящих расчетах оценка длина волны наиболее неустойчивого

возмущения на первом этапе дает $\lambda_m \approx 0.056h$. Для доминирующих структур на рис.5а имеем $\lambda_m \approx 0.5h$, что соответствует концу второй (нелинейной) стадии описанного выше сценария.

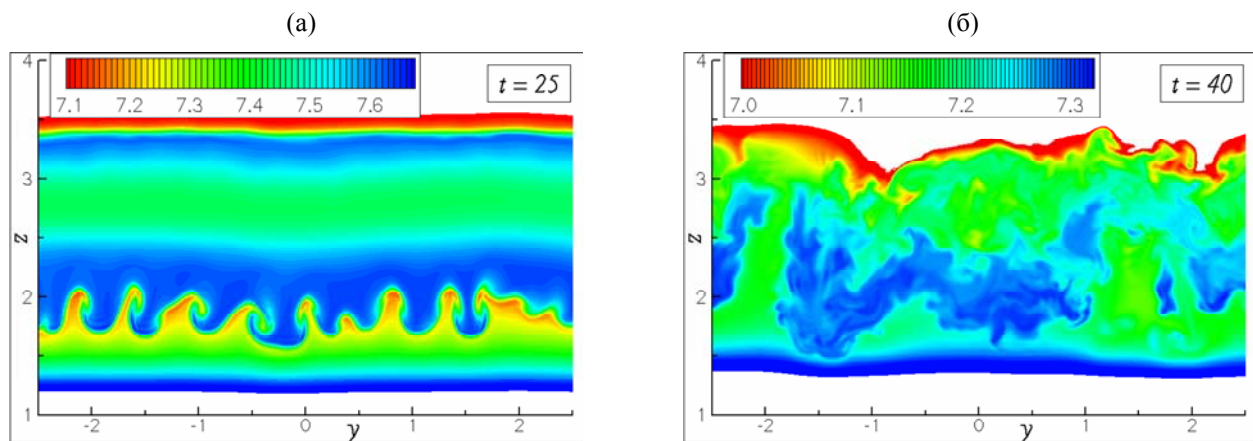


Рис. 5. Изолинии плотности (фрагмент сечения вдоль размаха препятствия) при обрушении внутренних волн: (а) грибовидные структуры на нелинейной этапе НРТ; (б) перемешанная область развитой турбулентности.

Список литературы

1. Abarzhi S.I. Review of theoretical modelling approaches of Rayleigh–Taylor instabilities and turbulent mixing // *Phil. Trans. Royal Soc. of London, Ser. A.* 2010. Vol. 368. P. 1809–1828.
2. Dimonte G., Youngs D.L., Dimitis A., et al. A comparative study of the turbulent Rayleigh–Taylor instability using high-resolution three-dimensional numerical simulations: The Alpha-Group collaboration // *Phys. Fluids.* 2004. Vol. 16. P. 1668–1693.
3. Cabot W.H., Cook A.W. Reynolds number effects on Rayleigh–Taylor instability with possible implications for type-Ia supernovae // *Nature Physics.* 2006. Vol. 2. P. 562–568.
4. Voropaev S.I., Afanasyev Y.D., van Heijst G.J.F. Experiments on the evolution of gravitational instability on an overturned, initially stably stratified fluid // *Phys. Fluids A.* 1993. Vol. 5. P. 2461–2466.
5. Yakovenko S.N., Thomas T.G., Castro I.P. A turbulent patch arising from a breaking internal wave // *J. Fluid Mech.* 2011. (accepted)
6. Яковенко С.Н., Чан К.С. Аппроксимация потока объемной фракции в течении двух жидкостей // *Теплофизика и аэромеханика.* 2008. Т. 15, № 2. С. 181–199.
7. Яковенко С.Н., Чан К.С. Применение неразрывной модели для силы поверхностного натяжения к задаче неустойчивости Рэля–Тейлора // *Теплофизика и аэромеханика.* 2011. Т. 18. (принято к печати)
8. Kelecy F.J., Pletcher R.H. The development of a free surface capturing approach for multidimensional free surface flows in closed containers // *J. Comp. Phys.* 1997. Vol. 138. P. 939–980.
9. Martin J.C., Moyce W.J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // *Phil. Trans. Royal Soc. of London, Ser. A.* 1952. Vol. 224. P. 312–324.
10. Chandrasekar S. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability.* Oxford: Clarendon Press, 1961.
11. Emmons H.W., Chang C.T., Watson B.C. Taylor instability of finite surface waves // *J. Fluid Mech.* 1960. Vol. 7. P. 177–193.
12. Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C. A continuum method for modeling surface tension // *J. Comp. Phys.* 1992. Vol. 100. P. 335–354.
13. Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1950. Vol. 201. P. 192–196.
14. Lewis D.J. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. II // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 1950. Vol. 202. P. 81–96.
15. Pullin D.I. Numerical studies of surface-tension effects in nonlinear Kelvin–Helmholtz and Rayleigh–Taylor instability // *J. Fluid Mech.* 1982. Vol. 119. P. 507–532.
16. Youngs D.L. Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh–Taylor instability // *Physica D.* 1984. Vol. 12. P. 32–44.