

О численном моделировании дифракции акустических волн на трёхмерных включениях*

А.А. КАШИРИН

Вычислительный Центр ДВО РАН

e-mail: elomer@mail.ru

С.И. СМАГИН

Вычислительный Центр ДВО РАН

e-mail: smagin@as.khb.ru

Рассматриваются задачи дифракции акустических волн на трёхмерных включениях. При помощи комбинации поверхностных потенциалов они сводятся к граничным интегральным уравнениям Фредгольма первого рода с одной неизвестной функцией. Для решения этих уравнений используется специальный метод осреднения интегральных операторов со слабыми особенностями в ядрах. В результате интегральные уравнения приближённо заменяются системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые затем решаются численно обобщённым методом минимальных невязок (GMRES). Приводятся результаты моделирования, позволяющие оценить возможности предлагаемого подхода.

1. Введение

Математическое моделирование процессов распространения стационарных акустических волн в средах с трёхмерными включениями играет важную роль в различных областях науки и техники и приводит к постановке задач математической физики, которые принято называть задачами дифракции. Точные аналитические решения таких задач могут быть построены только в исключительных случаях, поэтому основным направлением их исследования является прямое компьютерное моделирование.

Использование компьютера предполагает предварительное построение дискретного аналога рассматриваемой задачи, которое может осуществляться различными способами. При выборе способа дискретизации необходимо учитывать следующие свойства задач дифракции: решения задач ищутся в неограниченных областях, зависят от трёх пространственных переменных, медленно убывают на бесконечности, могут быстро осциллировать и должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности.

Указанные особенности приводят к тому, что алгоритмы численного решения задач дифракции, основанные на дифференциальных формулировках, приводящих к конечно-разностным или проекционно-сеточным схемам, являются малоэффективными.

Этот факт стимулировал развитие интегральных методов решения задач дифракции. Исследованиями в этой области занимались Н.М. Гюнтер, В.Д. Купрадзе, С.Г. Михлин, А.Г. Свешников, В.И. Дмитриев, С.М. Белоносов, В.А. Цецохо, В.В. Воронин, С. Muller, D. Colton, R. Kress, J.-C. Nedelec, W. McLean и др.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00947-а) и Дальневосточного отделения РАН (проект 09-III-B-01-012).

Разработанные ими методы позволяют сводить задачи дифракции к различным системам из двух интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями. С вычислительной точки зрения более предпочтительным представляется развивающийся с конца 80-х – начала 90-х годов подход, когда такие задачи формулируются в виде одного интегрального уравнения Фредгольма 1 или 2 рода с одной неизвестной функцией (С.И. Смагин, R.E. Kleinman, P.A. Martin, P. Ola). В данной работе для численного решения задач дифракции используются интегральные уравнения 1 рода.

Для численного решения этих уравнений применяется согласованный с шагом сетки специальный метод осреднения интегральных операторов со слабыми особенностями в ядрах, который был разработан и использовался ранее для решения интегральных уравнений краевых задач акустики.

Решения дискретизованных уравнений находились итерационными методами вариационного типа. Проверка правильности и точности численного метода проводилась с применением трёхмерных задач акустики, имеющих известные аналитические решения.

2. Интегральные уравнения скалярной задачи дифракции

Задача 1. Найти в ограниченной области Ω_i трёхмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 и в неограниченной области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_i$, разделённых замкнутой липшицевой поверхностью Γ , функции $\varphi_{i(e)} \in H^1(\Omega_{i(e)})$, удовлетворяющие тождествам

$$\int_{\Omega_{i(e)}} \nabla \varphi_{i(e)} \nabla \psi_{i(e)} dx - k_{i(e)}^2 \int_{\Omega_{i(e)}} \varphi_{i(e)} \psi_{i(e)} dx = 0 \quad \forall \psi_{i(e)} \in H_0^1(\Omega_{i(e)}), \quad (1)$$

условиям сопряжения на границе раздела сред из Ω_i и Ω_e

$$\langle \varphi_i - \varphi_e, \mu \rangle_\Gamma = \langle \varphi_0, \mu \rangle_\Gamma \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (2)$$

$$\langle \eta, p_i N \varphi_i - p_e N \varphi_e \rangle_\Gamma = \langle \eta, p_e \varphi_1 \rangle_\Gamma \quad \forall \eta \in H^{1/2}(\Gamma),$$

а также условию излучения на бесконечности для φ_e

$$\partial \varphi_e / \partial |x| - ik_e \varphi_e = o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

если на Γ заданы функции $\varphi_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ и $\varphi_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Gamma$ – отношение двойственности на $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, обобщающее скалярное произведение в $H^0(\Gamma)$,

$$\langle f, \bar{g} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma f \bar{g} d\Gamma \quad \forall f, g \in H^0(\Gamma),$$

\bar{g} – комплексно-сопряжённая к g функция, $N = \partial / \partial \mathbf{n}$, $\mathbf{n}(x)$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности Γ в точке x ,

$$p_{i(e)} = (\rho_{i(e)} \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}))^{-1}, \quad k_{i(e)}^2 = \omega (\omega + i\gamma_{i(e)}) / c_{i(e)}^2, \quad \text{Im}(k_{i(e)}) \geq 0,$$

ω – круговая частота колебаний, $c_{i(e)}$, $\rho_{i(e)}$, $\gamma_{i(e)}$ – скорости звука, плотности и коэффициенты поглощения сред, заполняющих области $\Omega_{i(e)}$, $c_{i(e)} > 0$, $\rho_{i(e)} > 0$, $\gamma_{i(e)} \geq 0$.

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Задача 1 имеет не более одного решения.*

Введём обозначения

$$(A_{i(e)}q)(x) \equiv \langle G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma}, \quad (B_{i(e)}q)(x) \equiv \langle N_x G_{i(e)}(x, \cdot), q \rangle_{\Gamma},$$

$$(B'_{i(e)}\varphi)(x) \equiv \langle \varphi, N_{(\cdot)} G_{i(e)}(x, \cdot) \rangle_{\Gamma}, \quad G_{i(e)}(x, y) = \exp(ik_{i(e)}|x - y|)/(4\pi|x - y|)$$

и рассмотрим потенциалы

$$\varphi_e(x) = (A_e q)(x), \quad x \in \Omega_e, \quad (4)$$

$$\varphi_i(x) = p_{ei}(A_i(N\varphi_e + \varphi_1)^+)(x) - (B'_i(\varphi_e + \varphi_0)^+)(x), \quad x \in \Omega_i,$$

где $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ – неизвестная плотность, $p_{ei} = p_e/p_i$, знаками «+» отмечаются предельные значения соответствующих выражений на Γ , когда $x \rightarrow \Gamma$ из области Ω_e .

Ядрами потенциалов (4) являются фундаментальные решения уравнений Гельмгольца и их нормальные производные. Поэтому они удовлетворяют тождествам (1) и условию излучения на бесконечности (3). Кроме того, выполнение для них первого из условий сопряжения (2) автоматически влечёт за собой выполнение второго условия сопряжения. Подставляя потенциалы (4) в первое условие сопряжения, получим эквивалентное задаче дифракции слабо сингулярное интегральное уравнение Фредгольма 1 рода

$$\langle (Cq), \mu \rangle_{\Gamma} = \langle \psi_0, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (5)$$

где

$$(Cq)(x) \equiv ((0.5(A_e + p_{ei}A_i) + (B'_iA_e - p_{ei}A_iB_e))q)(x),$$

$$\psi_0(x) = -0.5\varphi_0(x) + p_{ei}(A_i\varphi_1)(x) - (B'_i\varphi_0)(x).$$

Справедлива [1]

Теорема 2. *Пусть $\varphi_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\varphi_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ или ω не является собственной частотой задачи*

$$\Delta\varphi + k_e^2\varphi = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad \varphi = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) корректно разрешимо в классе плотностей $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и формулы (4) дают решение задачи 1.

Задача 1 допускает ещё одну эквивалентную формулировку в виде интегрального уравнения Фредгольма 1 рода со слабой особенностью в ядре. Будем искать её решение в виде

$$\varphi_i(x) = (A_i q)(x), \quad x \in \Omega_i, \quad (7)$$

$$\varphi_e(x) = (A_e(\varphi_1 - p_{ie}N\varphi_i)^-)(x) - (B'_e(\varphi_0 - \varphi_i)^-)(x), \quad x \in \Omega_e,$$

где $p_{ie} = p_i/p_e$, знаками «-» отмечаются предельные значения соответствующих выражений на Γ , когда $x \rightarrow \Gamma$ из области Ω_i . В этом случае задача 1 сводится к уравнению

$$\langle (Dq), \mu \rangle_{\Gamma} = \langle \varphi_0, \mu \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (8)$$

$$(Dq)(x) \equiv ((0.5(A_i + p_{ie}A_e) + (p_{ie}A_eB_i - B'_eA_i))q)(x)$$

и имеет место [1]

Теорема 3. *Пусть $\varphi_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\varphi_1 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\gamma_e > 0$ или ω не является собственной частотой задачи (6). Тогда уравнение (8) корректно разрешимо в классе плотностей $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и формулы (7) дают решение задачи 1.*

3. Метод численного решения

Излагаемый метод решения интегральных уравнений со слабыми особенностями в ядрах впервые был предложен в работе [2]. Кратко опишем общую схему его реализации. Построим покрытие поверхности Γ системой $\{\Gamma_m\}_{m=1}^M$ окрестностей узловых точек $x'_m \in \Gamma$, лежащих внутри сфер радиусов h_m с центрами в x'_m , и обозначим через $\{\varphi_m\}$ подчинённое ему разбиение единицы. В качестве φ_m будем использовать функции

$$\varphi_m(x) = \varphi'_m(x) \left(\sum_{k=1}^M \varphi'_k(x) \right)^{-1}, \quad \varphi'_m(x) = \begin{cases} (1 - r_m^2/h_m^2)^3, & r_m < h_m, \\ 0, & r_m \geq h_m, \end{cases}$$

где $x \in \Gamma$, $r_m = |x - x'_m|$.

Приближённые решения интегральных уравнений будем искать на сетке $\{x_m\}$,

$$x_m = \frac{1}{\bar{\varphi}_m} \int_{\Gamma} x \varphi_m d\Gamma, \quad \bar{\varphi}_m = \int_{\Gamma} \varphi_m d\Gamma,$$

узлами которой являются центры тяжести функции φ_m . Будем предполагать, что для всех $m = 1, 2, \dots, M$ выполняются неравенства

$$0 < h' \leq |x_m - x_n|, \quad m \neq n, \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad h' \leq \sigma_m \leq h_m \leq h, \quad h/h' \leq q_0 < \infty,$$

где h, h' - положительные числа, зависящие от M , q_0 не зависит от M , $\sigma_m^2 = 0.5\bar{\varphi}_m$.

Вместо неизвестной функции q будем искать обобщённую функцию $q\delta_{\Gamma}$, действующую по правилу $(q\delta_{\Gamma}, \varphi)_{\mathbb{R}^3} = \langle q, \varphi \rangle_{\Gamma}$. Приближать эту функцию будем выражением

$$q(x) \delta_{\Gamma}(x) \approx \sum_{n=1}^M q_n \psi_n(x),$$

где q_n - неизвестные коэффициенты, $\psi_n(x) = (\pi\sigma_n^2)^{-3/2} \exp(-(x - x_n)^2/\sigma_n^2)$.

Умножим обе части интегральных уравнений на φ_m , проинтегрируем по Γ и аппроксимируем интегральный оператор 1 рода по формуле [3]

$$\int_{\Gamma} (A_{i(e)}q) \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M A_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

а интегральный оператор 2 рода - по формуле [4]

$$\int_{\Gamma} (aq + (B_{i(e)}q)) \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \sum_{n=1}^M B_{i(e)}^{mn} q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (10)$$

Здесь $A_{i(e)}^{mn} \equiv A_{mn}(k_{i(e)})$,

$$A_{mn}(k) = 0.5\beta_{mn} \exp(-\gamma_{mn}^2) (w(z_1) - w(z_2))/r_{mn}, \quad m \neq n,$$

$$\beta_{mn} = \bar{\varphi}_n (4\pi)^{-1} \exp(\mu_{mn}^2), \quad \mu_{mn} = 0.5k\sigma_{mn},$$

$$r_{mn} = |x_m - x_n|, \quad \sigma_{mn} = (\sigma_m^2 + \sigma_n^2)^{1/2}, \quad \gamma_{mn} = r_{mn}/\sigma_{mn},$$

$$z_1 = \mu_{mn} - i\gamma_{mn}, \quad z_2 = \mu_{mn} + i\gamma_{mn}, \quad i^2 = -1,$$

$$w(z) = \exp(-z^2) \left(1 + i2\pi^{-1/2} \int_0^z \exp(t^2) dt \right),$$

$$A_{mm}(k) = \beta_{mm} \left[ikw(\mu_{mm}) + 2(\sigma_{mm}\pi^{1/2})^{-1} + 2\pi^{1/2}\sigma_{mm}(\bar{\varphi}_m)^{-1}(1 - 2(\mu_{mm})^2/3) \right],$$

$$B_{i(e)}^{mn} = (4\pi r_{mn}^3)^{-1} n_{mn}^* (\exp(ik_{i(e)}r_{mn})(ik_{i(e)}r_{mn} - 1)) \bar{\varphi}_n, \quad n_{mn}^* = \sum_{l=1}^3 n_{lm}(x_{lm} - x_{ln})$$

$$B_{i(e)}^{mm} = -\text{Gs}(x_m) \quad \text{при } a = 0.5, \quad B_{i(e)}^{mm} = -1 - \text{Gs}(x_m) \quad \text{при } a = -0.5,$$

$$\text{Gs}(x_m) = \sum_{n \neq m}^M \frac{n_{mn}^* \bar{\varphi}_n}{4\pi r_{mn}^3} \approx \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{1}{|x_m - y|} d\Gamma_y = -\frac{1}{2}.$$

Интегральные операторы в левых частях уравнений (5) и (8) являются композицией интегральных операторов (9) и (10), аппроксимируем их по формулам

$$\int_{\Gamma} (Cq) \varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (A_e^{mn} B_i^{mn} - p_{ei} A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma} (Dq) \varphi_m d\Gamma \approx \sum_{n=1}^M (p_{ie} A_e^{mn} B_i^{mn} - A_i^{mn} B_e^{mn}) q_n, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (12)$$

а правые части уравнений (5) и (8) – по формулам

$$\int_{\Gamma} \psi_0 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \left(\text{Gs}(x_m) \varphi_0(x_m) + \sum_{n=1}^M \bar{\varphi}_n [p_{ei} A_i^{mn} \varphi_1(x_n) - \varphi_0(x_n) B_i^{nm}] \right),$$

$$\int_{\Gamma} \varphi_0 \varphi_m d\Gamma \approx \bar{\varphi}_m \varphi_0(x_m), \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Решая соответствующие СЛАУ, найдём приближённые решения интегральных уравнений (5) и (8). После этого искомые решения задач дифракции могут быть достаточно просто найдены в любой точке пространства.

4. Результаты численного моделирования

Правильность и точность численного метода проверялись с использованием тестовых задач, имеющих аналитические решения. В качестве последних выбирались сформулированные в виде интегральных уравнений задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца в областях, ограниченных единичной сферой и эллипсоидом с полуосями (0.4, 1, 0.2), и задача о дифракции плоской акустической волны на единичном шаре [5]. Интегральные операторы в этих задачах имеют вид (9)–(12), волновые числа $k_{i(e)}$ выбирались из диапазона от 0 до 21, количество точек дискретизации $M = 500 \div 128000$.

Моделирование проводилось на кластере ВЦ ДВО РАН [6]. Оно показало, что GMRES [7] позволяет вычислять искомые решения за небольшое по сравнению с порядком

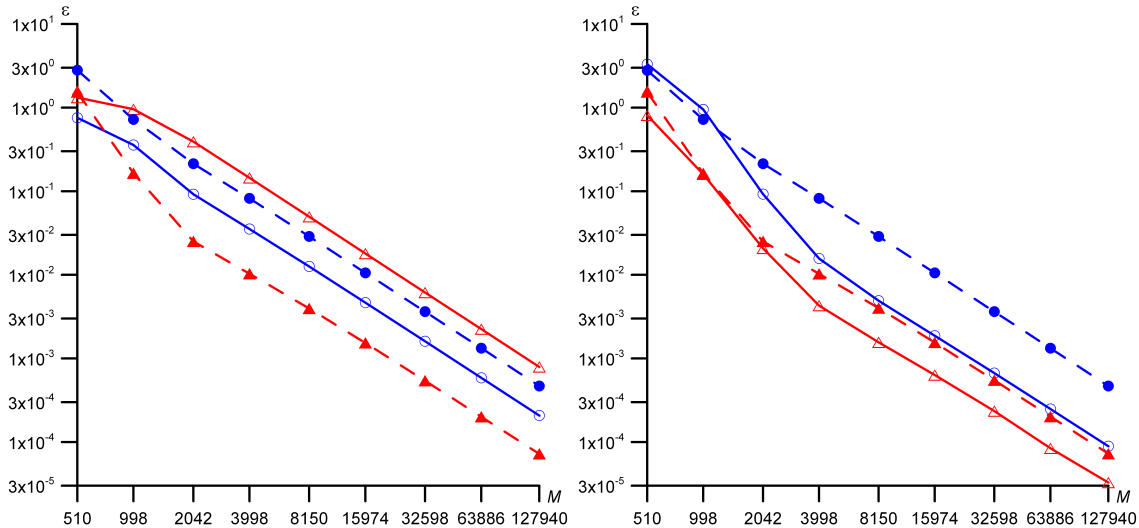


Рис. 1. Зависимость погрешностей решений задач дифракции от количества точек дискретизации. Граница включения – единичная сфера.

СЛАУ количество итераций, которое слабо зависит от M . При этом величина погрешности в рассматриваемых задачах при больших M имеет порядок не хуже $h^2 \sim M^{-1}$.

В качестве примера на рис. 1 приведены зависимости относительных погрешностей решений, посчитанных в норме пространств сеточных функций $H_h^0(\Omega_{i(e)})$, от количества точек дискретизации для двух задач дифракции. Граница области – единичная сфера, исходные данные первой задачи – $k_i = 7$, $\rho_i = 2$, $k_e = 16.5$, $\rho_e = 5$ (результаты помечены треугольниками); второй задачи – $k_i = 21$, $\rho_i = 7$, $k_e = 13.5$, $\rho_e = 4.5$ (результаты помечены кругами). Сплошной линией изображена погрешность вычисления функции φ_i , пунктиром – функции φ_e . Представленные на левом рисунке результаты получены с использованием уравнения (5), на правом рисунке – с использованием уравнения (8).

Список литературы

- [1] Каширин А.А., Смагин С.И. Обобщенные решения интегральных уравнений скалярной задачи дифракции // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 1. С. 79–90.
- [2] Смагин С.И. Численное решение интегрального уравнения I рода со слабой особенностью на замкнутой поверхности // ДАН СССР. 1988. Т. 303, № 5. С. 1048–1051.
- [3] Каширин А.А. Исследование и численное решение интегральных уравнений трехмерных стационарных задач дифракции акустических волн: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Хабаровск, 2006. 118 с.
- [4] Ершов Н.Е., Смагин С.И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн на трёхмерном упругом включении. Владивосток, 1989 (Препр. АН СССР, ДВО, ВЦ).
- [5] Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В. Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. Киев: Наукова думка, 1985. 136 с.
- [6] Основные сведения о вычислительном кластере [Электронный ресурс]: <http://hpc.febras.net/node/10> (проверено 28.02.2011 г).
- [7] SAAD Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. Boston: PWS Publ. Co., 2000. 460 p.