

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭКМАНОВСКОГО ТИПА *

Л. А. КОМПАНИЕЦ
ИВМ СО РАН г. Красноярск
e-mail: kla@icm.krasn.ru

Рассматривается трехмерное стационарное ветровое движение неоднородной жидкости экмановского типа с заданной плотностью. Плотность линейно зависит от температуры, распределение которой по глубине соответствует наличию термоклина в сильно стратифицированном озере.

Найдено аналитическое решение, позволяющее проанализировать тип течения в зависимости от силы и направления ветра.

Как указано в работе [1], в большинстве наблюдаемых природных течений фактор плотностной стратификации играет решающую роль.

Такие течения требуют комплексного подхода к изучению – важными являются как натурные измерения, так и результаты численного моделирования. Несомненно, полезными будут аналитические решения, которые описывают движение неоднородной жидкости. Отметим в этой связи книгу [2], работы [3]–[4], в которых плотностная стратификация определялась изменением температуры, и представляла линейную функцию пространственных координат.

Однако чаще изменение плотности по глубине происходит таким образом, что появляется верхний прогретый слой. Например, натурные измерения озера Шира в летний период 2010 г. показывают, что распределение температуры и солёности формируют устойчивую плотностную стратификацию следующего вида

Случай, когда плотность распределяется по глубине с образованием зоны резкого изменения, достаточно распространен и является интересным объектом для математического моделирования.

Моделирование ветрового движения такой жидкости проводилось на основе системы уравнений, которая применялась для определения вида течения неоднородной жидкости в работах [5]–[6]. В стационарном эта система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - lv + \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \frac{\partial}{\partial x} \rho dz, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + lu + \frac{g}{\rho_0} \int_z^0 \frac{\partial}{\partial y} \rho dz, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости течения; l — параметр Кориолиса, $K_z = \text{const}$ — коэффициент вертикального турбулентного обмена; g — ускорение свободного

*Работа выполнена в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 95.

падения; $\zeta = \zeta(x)$ — отклонение поверхности жидкости от равновесного положения $z = 0$, $\rho = \rho(x, y, z)$ — известная плотность воды и ρ_0 — средняя плотность воды.

Ось Oz направлена вертикально вверх.

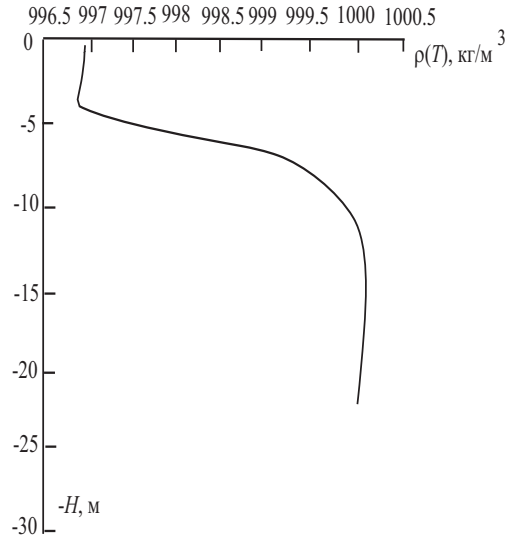


Рис. 1. Пример распределения плотности по глубине в озере Шира

Граничные условия на поверхности водоема ($z=0$):

$$\rho_0 K_z \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \tau^x, \quad \rho_0 K_z \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \tau^y. \quad (2)$$

Здесь τ^x, τ^y — напряжение трения ветра на поверхности водоема.

На дне ($z = -H$) ставятся условия прилипания: $u|_{z=-H} = 0, v|_{z=-H} = 0$.

Граничные условия для w в стационарном случае записываются в виде $u|_{z=-H} = 0, v|_{z=-H} = 0$.

Пусть градиенты свободной поверхности невелики и их влиянием можно пренебречь. Введем обозначения

$$W = u + iv, \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \quad \tau^W = \tau^x + i\tau^y$$

Тогда система уравнений (1) переписывается в виде

$$K_z \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - i l W = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial n} \int_z^0 \rho dz$$

с граничными условиями:

$$K_z \left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{\tau^W}{\rho_0}, \\ W|_{z=-H} = 0.$$

Пусть распределение температуры задается формулой

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) \cdot T_2(z),$$

$$T_1(x, y) = 4,17 \cdot 10^{-6} x + 1,$$

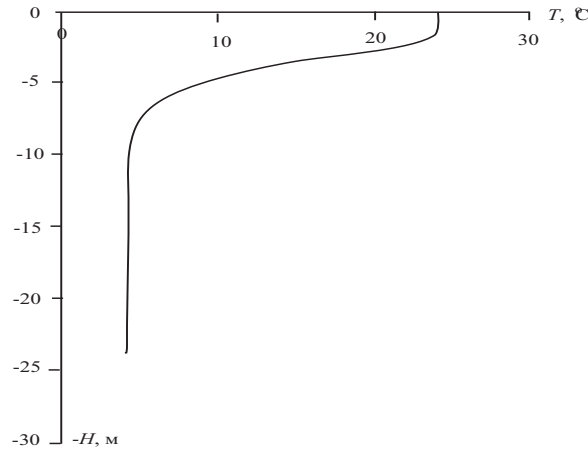


Рис. 2. Распределение температуры для численного эксперимента

$$T_2(z) = 20 \cdot e^z \left(0,0003 \cdot z^4 - 0,015 \cdot z^3 + 1,3 \cdot z^2 - 0,4 \cdot z + 1 \right) + 4.$$

Вид функций T_1, T_2 соответствует реальному распределению температуры в озере Шира и наблюдавшейся горизонтальной неоднородности.

Пусть плотность зависит от температуры в соответствии с формулой

$$\rho = \rho_0(1 - 1.5 \cdot 10^{-4}T).$$

Тогда соответствующее распределение плотности имеет вид

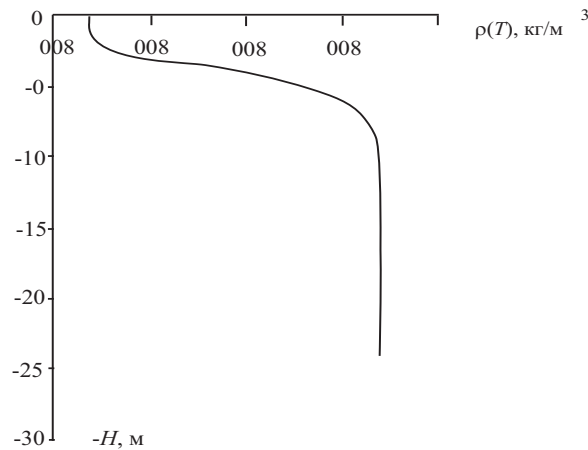


Рис. 3. Распределение плотности для численного эксперимента

Аналитическое решение ищется в виде

$$W = u + iv = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} + C_3 \left[e^z \left(a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 \right) + a_6 z + a_7 \right],$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{il}{K_z}},$$

Пусть ветер имеет скорость 5 м/с направлен вдоль оси OX .

Сравним решение, полученное для случая неоднородной жидкости (рис. 4) и однородной (рис. 5) жидкости. Для случая неоднородной жидкости горизонтальная скорость

u меняет знак два раза: в районе термоклина и еще раз на глубине 15 м. Вторая скорость знака не меняет. Для случая однородной жидкости перемена знака происходит один раз для обеих скоростей. Для случая движения в вертикальной плоскости такие течения классифицируются как двухциркуляционное и одноциркуляционное соответственно.

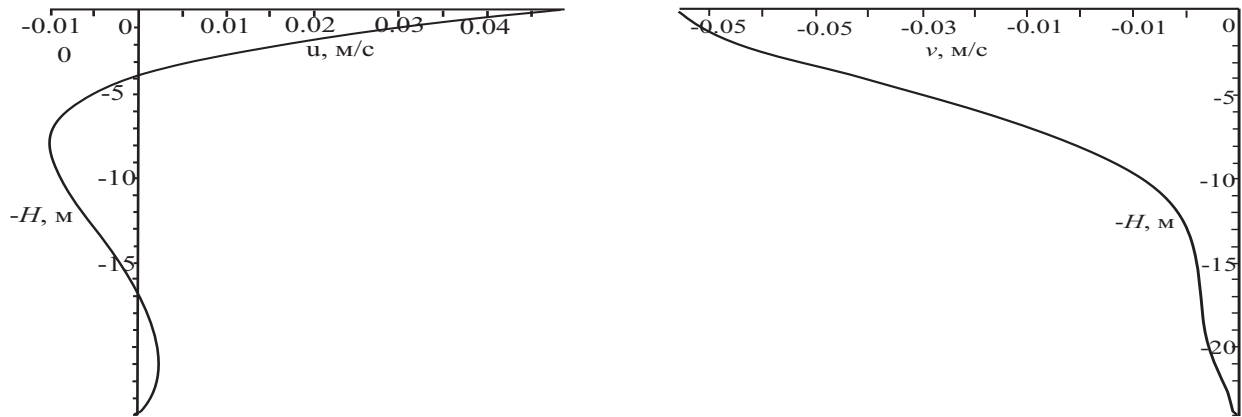


Рис. 4. Неоднородная жидкость

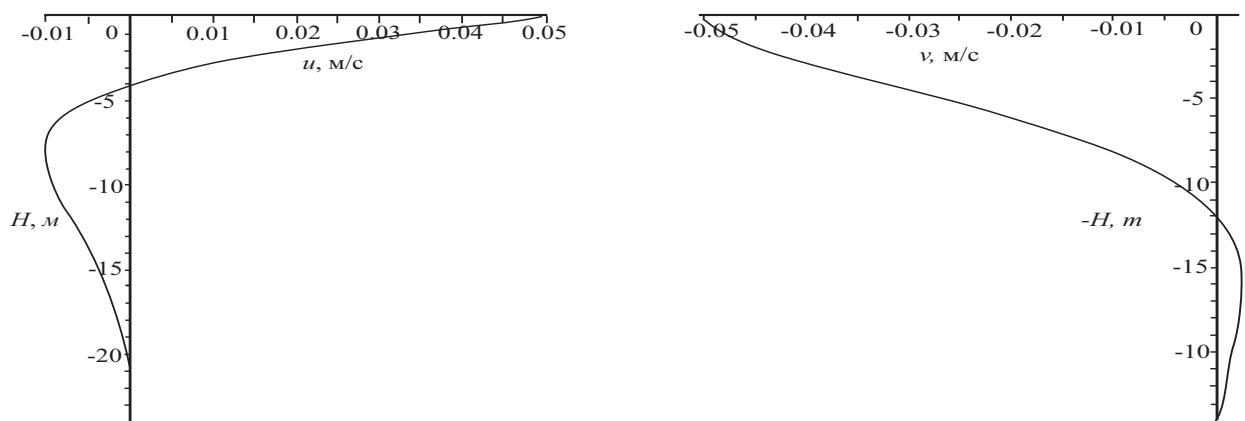


Рис. 5. Однородная жидкость

Список литературы

- [1] Самолюбов Б.И. Плотностные течения и диффузия примесей. Москва: ЛКИ, 2007, 352 с.
- [2] Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
- [3] Шварц К.Г. Модели геофизической гидродинамики. Пермь, 1994 (Учебное пособие по спецкурсу).
- [4] Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Пермский ун-т, 2006, 155 с.
- [5] Квон В.И. Гидродинамический расчет водоемов-охладителей // Известия Академии наук СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 5. С. 129–137.
- [6] Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. Москва: Наука, 1978, 127 с.