

<sup>1</sup> e-mail: shurina@online.sinor.ru

## Особенности моделирования задач геоэлектрики.

Э.П. ШУРИНА

*Новосибирский Государственный Технический Университет*

e-mail: shurina@online.sinor.ru

О.В. НЕЧАЕВ

М.И. ЭПОВ

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН*

Three dimensional electromagnetic fields modeling numerical schemes are offered in paper. Different aspects of numerical schemes of electromagnetic fields in varies domain with impulse and harmonic frequency dependence of time are analyzed.

Задачи геоэлектрики в зависимости от системы источник - приемник можно классифицировать следующим образом: скважинная электроразведка, наземная электроразведка, морская электроразведка. Каждая из этих систем характеризуется геометрическими, физическими и временными параметрами. Область моделирования - это сложно построенная геологическая структура, состоящая из разномасштабных, контрастных по электрофизическим свойствам фрагментов.

Математической моделью, описывающей поведение электрического поля, является система уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathbf{J}_T, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{e} + \mathbf{J}_S, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

где  $\mathbf{E}$  - напряженность электрического поля,  $\mathbf{H}$  - напряженность магнитного поля,  $\mathbf{D}$  - индукция электрического поля,  $\mathbf{B}$  - индукция магнитного поля,  $\mathbf{J}_S$  - плотность стороннего электрического тока,  $\mathbf{J}_T$  - плотность стороннего «магнитного тока»,  $\sigma$  - удельная электропроводность,  $\rho$  - плотность электрических зарядов,  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  - магнитная проницаемость. Если в качестве источника возбуждения электромагнитного поля используется соленоидальный контур, то плотность тока  $\mathbf{J}_T = 0$ , если источник поля - тороидальный контур, то  $\mathbf{J}_S = 0$ .

---

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ: 09-05-00702

Дивергентные условия (3), (4) есть следствие фундаментальных уравнений (1), (2), обеспечивающие закон сохранения заряда (3) и соленоидальность магнитного поля (4). Отсюда следует, что вычислительные схемы, аппроксимирующие систему уравнений Максвелла, должны в некотором смысле удовлетворять дискретным аналогам условий (3), (4) [1].

Применяя прямое преобразование Фурье по времени, можно перейти из временной в частотную область, далее систему уравнений Максвелла можно преобразовать к векторному уравнению второго порядка. Если в качестве источника рассматривается соленоидальный контур, то формулируется краевая задача относительно вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ .

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \varepsilon \omega^2 \mathbf{E} + i\omega \sigma \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J}_S, \quad (5)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

где  $\partial\Omega$  - граница расчетной области  $\Omega$ .

Если в качестве источника поля используется тороидальный контур, то формулируется краевая задача относительно вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\sigma + i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega\mu \mathbf{H} = \mathbf{J}_S \quad (6)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0,$$

Так как область моделирования состоит из подобластей  $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ , то на межфрагментарных границах  $\Gamma_{ij}$  должны выполняться условия непрерывности для электрического и магнитного полей

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad [\mathbf{n} \cdot (\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E}]_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad (7)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad [(\sigma + i\omega\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n}]_{\Gamma_{ij}} = 0. \quad (8)$$

Выполнение условий непрерывности (7), (8) обеспечивает сохранение заряда и условие соленоидальности ( $\operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0$ ) в областях с контрастными электрофизическими характеристиками в подобластях. Вычислительные схемы для решения задач (5), (6), (7), (8) конструируются на базе векторного метода конечных элементов на симплицальных разбиениях, иерархических векторных базисных функциях высоких порядков.

Введем следующие пространства [2, 3]

$$H_0^1 = \{\phi \in L^2(\Omega); \operatorname{grad} \phi \in [L^2(\Omega)]^3, \phi|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$H_0(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3; \operatorname{rot} \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3, \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

с нормой и скалярным произведением.

Для задач (5), (6) сформулируем вариационные постановки I II.

I. Для  $\mathbf{J}_S \in [L^2(\Omega)]^3$  найти  $\mathbf{E} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$  такое, что для  $\forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$

$$\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{v}\right) - ((\omega^2 \varepsilon - i\omega \sigma) \mathbf{E}, \mathbf{v}) = -i\omega (\mathbf{J}_S, \mathbf{v}).$$

II. Для  $\mathbf{J}_T \in [L^2(\Omega)]^3$  найти  $\mathbf{H} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$  такое, что для  $\forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{rot}, \Omega)$

$$\left(\frac{1}{\sigma + i\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{v}\right) + i(\omega\mu \mathbf{H}, \mathbf{v}) = (\mathbf{J}_T, \mathbf{v}).$$

Для пространства  $H_0(rot, \Omega)$  имеет место следующее свойство вложения [1]

$$grad\phi \in H_0(rot, \Omega), \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (9)$$

Решение задач I, II при выполнении свойств вложения для векторной конечноэлементной аппроксимации этих вариационных уравнений [4] удовлетворяет закону сохранения зарядов [5] и условию соленоидальности в слабом смысле.

Для построения дискретного аналога вариационных задач I, II элементы пространства  $H_0(rot, \Omega)$  будем аппроксимировать элементами дискретного подпространства  $H_0^h(rot, \Omega)$ , в качестве базисных векторных функций возьмем третьего полного порядка на тетраэдральных конечных элементах [6]. Дискретные аналоги вариационных задач I, II, для которых на дискретных подпространствах  $H_0^h(rot, \Omega)$  выполняется свойство вложения (9), удовлетворяют закону сохранения заряда и условию соленоидальности магнитного поля в слабом смысле.

Вычислительные схемы реализованы в виде программного комплекса, на базе которого было выполнено моделирование трехмерного электромагнитного поля для модельных и реальных задач. Вычисления выполнялись в частотной области на дискретном множестве частот при импульсном возбуждении поля, т.к. этот алгоритм эффективно распараллеливается и время вычислений сокращается при сохранении точности вычислений. Эффективный алгоритм решения конечноэлементной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) разработан и реализован для решения СЛАУ с комплекснозначной знаконеопределенной матрицей [7].

Область моделирования состоит из верхнего слабо проводящего полупространства (воздух) с удельным электрическим сопротивлением (УЭС) 1 М Ом м, слоя морской воды (мощность 1000 м, УЭС 0.3 Ом м) и подстилающим полупространством с УЭС равным 1 Ом м. В подстилающей среде на глубине 2000 м (здесь и далее глубина измеряется относительно уровня моря) находится антиклинальная структура с УЭС равным 100 Ом м. Источником электромагнитного поля является соленоидальный либо тороидальный квадратные контуры, со стороной 100 м. Ток в катушке описывается импульсом Гаусса:  $I = exp(-0.125 \cdot (t - 10)^2)$  (А). Его максимальное значение достигается при  $t=10$  с.

Если источником является тороидальный контур, то в качестве измеряемой величины выбрана вертикальная компонента электрического поля. На (рис. 1, 2) приведена ее зависимость от времени, при двух значениях заглубления источника 980 м и 20 м. Если источник - соленоидальный контур, то в качестве измеряемого сигнала выбрана вертикальная компонента магнитного поля (рис. 3). Измерения выполнены в точке, расположенной на 1000 м левее от центра контура в горизонтальной плоскости. На рисунках использованы следующие обозначения: линия 1 - антиклинальной структуры нет, линия 2 - генераторный контур находится в над центром антиклинальной структуры, линия 3 - центр контура находится над левой границей антиклинальной структуры, линия 4 - центр контура находится над правой границей антиклинальной структуры. Как видно из рисунков чувствительность вертикальной компоненты магнитного поля к залежи отсутствует, даже в случае использования придонной установки. Следовательно, применение соленоидальных токовых контуров нецелесообразно.

Из анализа результатов вычислительных экспериментов следует, что использование в качестве источника электромагнитного поля соленоидальной катушки не позволяет обнаруживать антиклинальную ловушку - объект с большим удельным сопротивлением 100 Ом м. При возбуждении поля тороидальным источником антиклинальная ловушка может быть обнаружена. Как следует из рис. 4- 5, расположение тороидальной катушки

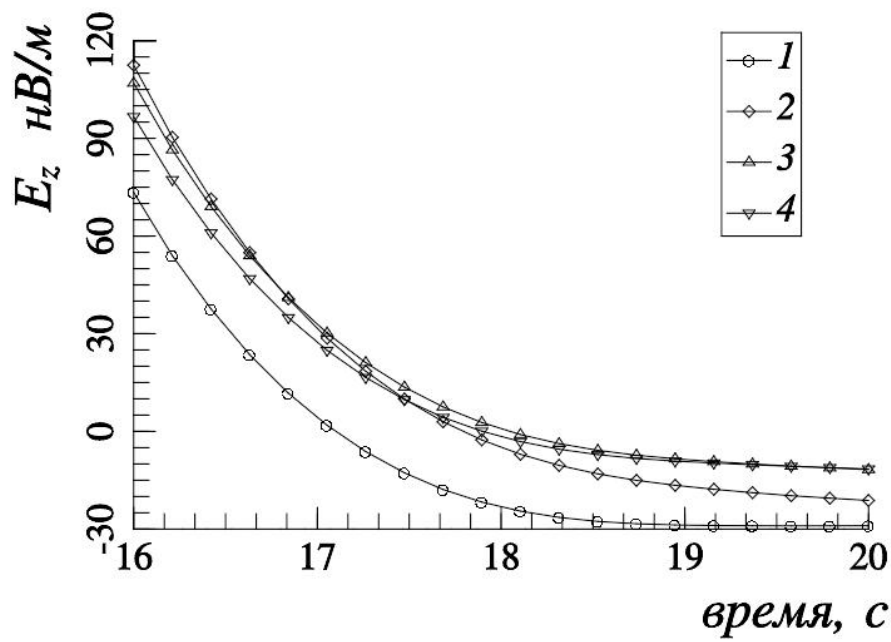


Рис. 1. Зависимость вертикальной компоненты электрического поля от времени, источник — тороидальный контур расположен на глубине 980 м.

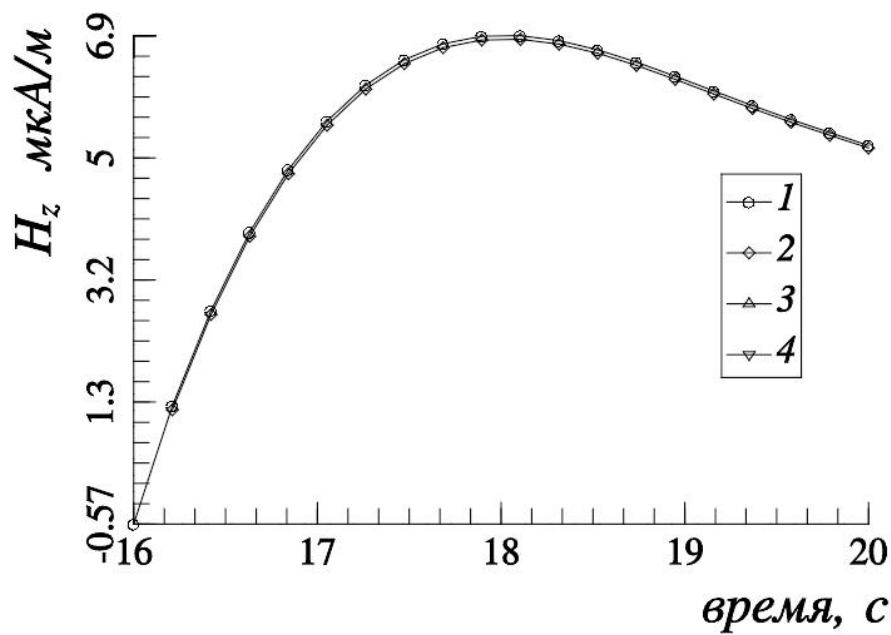


Рис. 2. Зависимость вертикальной компоненты электрического поля от времени, источник — тороидальный контур на глубине 20 м.

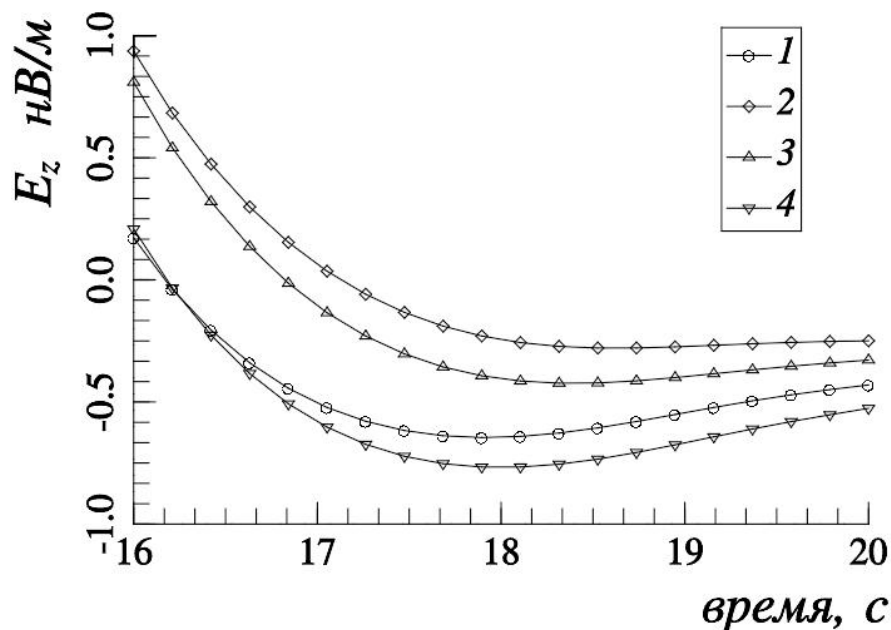


Рис. 3. Зависимость вертикальной компоненты магнитного поля от времени, источник — соленоидальный контур на глубине 980м.

на малой глубине, а датчиков около дна, дает возможность более точного определения положения антиклинальной ловушки относительно источника электромагнитного поля.

### Список литературы

- [1] PETER MONK Finite element method for Maxwell's equations. Oxford: Clarendon Press, 2003, 468 P.
- [2] NEDELEC J. C. Mixed Finite Elements in  $H(rot, \Omega)$  // Numerische Mathematik 1980, Vol. 35, P. 315-341.
- [3] NEDELEC J. C. A New Family of Mixed Finite Elements in  $H(rot, \Omega)$  // Numerische Mathematik 1986, Vol. 50 P. 57-81.
- [4] НИПТМАЙР R. Finite elements in computational electromagnetism // Acta Numerica, 2002, P. 237-330.
- [5] О. В. НЕЧАЕВ, Е. П. ШУРИНА, М. А. БОТЧЕВ Multilevel iterative solvers for the edge finite element solution of the 3D Maxwell equation // Computers and Mathematics with Applications, 2008 Vol. 55 P. 2346-2362
- [6] WEBB J. P. Hierarchical Vector Basis Functions of Arbitrary Order for Triangular and Tetrahedral Finite Elements // IEEE Transactions on antennas and propagation, 1999, Vol. 47, N. 8, P. 1244-1253.
- [7] Э. П. ШУРИНА, М. И. ЭПОВ, О. В. НЕЧАЕВ Устойчивые вычислительные схемы моделирования трехмерных электромагнитных полей в задачах геоэлектрики // Труды первой международной молодежной школы-конференции «Теория и численные

методы решения обратных и некорректных задач» Часть I. Новосибирск 2010, с.150-163.