

Новый метод трёхмерной томографии для неполных траекторий источника.

А.В. ЛИХАЧЕВ

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН

e-mail: ipm1@iae.nsk.su

Н.В. ВАЖЕНЦЕВА

Предлагается следующий метод реконструкции по данным, полученным для неполной траектории источника. Исходя из имеющихся конусных проекций, по теореме Гранжа там, где это возможно, вычисляется производная от трёхмерного преобразования Радона искомой функции. Согласно модифицированному условию Кавальери, она экстраполируется на всю область определения. Далее для реконструкции используется формула обращения преобразования Радона

1. Введение

Предлагаемая работа посвящена трёхмерной трансмиссионной томографии. Рассматривается следующая схема регистрации проекционных данных: источник зондирующего излучения движется относительно объекта по некоторой кривой. Интенсивность излучения, прошедшего через объект, регистрируется двумерным детектором, движущимся синхронно с источником. Задача определения по эти данным распределения коэффициента ослабления зондирующего излучения в объёме исследуемого тела сводится к реконструкции функции трёх переменных по набору интегралов от неё вдоль некоторого множества лучей в трёхмерном пространстве.

В работе [1] была получена формула обращения интегрального преобразования, описывающего рассматриваемую задачу. Там же были установлены условия, называемые условиями полноты, которые должны накладываться на траекторию источника, для того чтобы можно было использовать эту формулу. Главное из условий полноты состоит в том, что любая плоскость, пересекающая носитель искомой функции, должна также пересекать траекторию источника. В настоящее время не существует доказательства того, что указанное условие является необходимым для точной реконструкции в любой точке функции с ограниченным носителем.

В предлагаемой работе для реконструкции по данным, полученным при неполной траектории источника, разработан метод, основанный на свойстве преобразования Радона, известном как условие Кавальери [2] (иногда его также называют аналогом теоремы Пэли-Винера). В работе [3] этот метод был применён для задачи двумерной томографии с ограниченным диапазоном углов. Результаты, полученные в [3], показали, что в двумерном случае использование условия Кавальери позволяет улучшить качество реконструкции по сравнению со стандартными томографическими алгоритмами.

2. Теория

Преобразование, переводящее быстро убывающую функцию $g(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in R^m$, в набор её интегралов по всевозможным $(m - 1)$ -мерным гиперплоскостям в R^m , называется m -

мерным преобразованием Радона. Оно определяется согласно формуле, см. [4]:

$$f(\mathbf{n}, p) \equiv (\mathbf{R}g)(\mathbf{n}, p) = \int_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle = p} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (1)$$

где $\mathbf{n} \in S^{m-1}$ (S^{m-1} – единичная сфера в R^m), $p \in R^1$; через $\langle \circ, \circ \rangle$ обозначено скалярное произведение. При фиксированном векторе \mathbf{n} функция одной переменной $f_{\mathbf{n}}(p) \equiv (\mathbf{R}g)(\mathbf{n}, p) |_{\mathbf{n}=\text{const}}$ называется одномерной проекцией функции $g(\mathbf{r})$.

Известны формулы обращения преобразования Радона в пространстве любой размерности. В частности в трёхмерном случае формула обращения имеет вид [4]:

$$g(\mathbf{r}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial^2 (\mathbf{R}g)(\mathbf{n}(\varphi, \theta), p)}{\partial p^2} \Big|_{p=\langle \mathbf{r}, \mathbf{n}(\varphi, \theta) \rangle} |\sin \theta| d\theta d\varphi, \quad (2)$$

единичный вектор \mathbf{n} параметризован посредством полярного угла θ и азимутального угла φ , он имеет компоненты $(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$.

Обозначим через $M_k(\varphi, \theta)$ момент k -го порядка от одномерной проекции,

$$M_k(\varphi, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{n}(\varphi, \theta), p) p^k dp. \quad (3)$$

Согласно условию Кавальери, все $M_k(\varphi, \theta)$ являются однородными многочленами степени k от компонент вектора \mathbf{n} , [2]:

$$M_k(\varphi, \theta) = \sum_{i+j+l=k} a_{ijl,k} n_x^i n_y^j n_z^l, \quad 0 \leq i, j, l \leq k. \quad (4)$$

Причём коэффициенты $a_{ijl,k}$ не зависят от углов φ и θ .

Для рассматриваемой задачи трансмиссионной томографии можно считать, что в каждой точке детектора регистрируется интеграл от искомой функции $g(\mathbf{r})$ вдоль луча, проходящего через эту точку и источник зондирующего излучения. Определим лучевое преобразование функции $g(\mathbf{r})$ следующим образом

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{n}) = \int_0^{\infty} g(\mathbf{s} + \mathbf{n}q) dq, \quad \mathbf{s} \in R^3, \mathbf{n} \in S^2, q \in R^1. \quad (5)$$

Здесь \mathbf{s} – точка, в которой находится источник; \mathbf{n} – направление от источника на рассматриваемую точку детектора. При фиксированном положении источника функция переменной \mathbf{n} называется проекцией в расходящихся лучах. При регистрации данных плоским двумерным детектором, она является функцией двух переменных, заданных на его поверхности.

В работе [5] было установлено следующее соотношение:

$$\frac{r_s^2}{|\mathbf{s} \times \mathbf{n}|} \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{s}, p')}{\partial p'} \Big|_{p'=0} = \frac{\partial (\mathbf{R}g)(\mathbf{n}, p)}{\partial p} \Big|_{p=\langle \mathbf{s}, \mathbf{n} \rangle} \quad (6)$$

где

$$\tilde{f}(\mathbf{s}, p') = \int_{L(p')} \frac{r_s}{|\mathbf{s}, A(q)|} f(\mathbf{s}, A(q)) dq \quad (7)$$

Каждая из систем (9) содержит N уравнений и $(k+1)(k/2+1)$ неизвестных, которые являются коэффициентами однородных полиномов $a_{ijl,k}$. Выбор метода решения систем (9) зависит от конкретных условий, в частности, от соотношения чисел N и k . Если $N > (k+1)(k/2+1)$ то для решения целесообразно применять метод наименьших квадратов.

После того, как коэффициенты $a_{ijl,k}$ найдены, по условию Кавальери (4) вычисляются моменты с 1-го до K -го порядка для первых производных N_1 неизвестных одномерных проекций. Их направления выбираются таким образом, чтобы равномерно заполнить угловые интервалы, в которых $\partial f(\mathbf{n}, p)/\partial p$ оказалась не определена после применения теоремы Гранжа к исходным проекционным данным.

Представим интеграл в правой части (8) в виде конечной суммы:

$$M_k(\varphi, \theta) = h \sum_{\mu=-m/2}^{m/2} f(\mathbf{n}(\varphi, \theta), \mu h)(\mu h)^{k+1}, \quad (10)$$

где h - шаг равномерной сетки, на которой заданы проекции. Штрихом обозначена производная по третьей переменной. Выражение (10) представляет собой систему линейных уравнений для определения значений первой производной неизвестной проекции в узлах сетки. Она содержит K уравнений и m неизвестных. Для использованных в работе K и m имело место $K \ll m$, в связи с этим система (10) решалась алгоритмом ART.

В результате описанных выше операций первые производные одномерных проекций оказываются известными для направлений вектора \mathbf{n} , равномерно распределённых по углам. Продифференцировав их ещё раз, можно реконструировать искомую функцию $g(\mathbf{n})$ по формуле (2).

4. Вычислительный эксперимент

Моделировалась следующая схема сбора проекционных данных. Источник движется в плоскости $z = 0$ по окружности радиуса r_s с центром в начале координат. Регистрирующая поверхность двумерного детектора перпендикулярна плоскости $z = 0$. Центр детектора описывает вокруг начала координат окружность радиуса 1. Движение происходит таким образом, что в любой момент прямая, проходящая через источник перпендикулярно поверхности детектора, проходит через начало координат. Число двумерных конусных проекций составляло 360. Они были распределены равномерно (через 1°) в интервале от 0° до 360° . Размер детекторов равнялся 2.0×2.0 . На каждом из них задавалась сетка 256×256 узлов.

Математический фантом состоял из девяти одинаковых дисков, радиусом 0.5, расположенных один над другим вдоль оси Z . Центры дисков лежат на этой оси. Толщина дисков – 0.03125, плотность – 1.0, зазор между ними – 0.046875.

В вычислительном эксперименте исследовалась точность восстановления первых производных неизвестных одномерных проекций в зависимости от различных факторов. В рассматриваемой схеме сбора проекционных данных первую производную преобразования Радона можно вычислить для любого азимутального угла в интервале от 0° до 360° , для полярного же угла существует ограничение [5]. Предположим, что одномерные проекции вычисляются на интервале $[-1; 1]$. Пусть вектор \mathbf{n} задаётся углами φ и θ , а положение источника на окружности углом ϕ . По формуле (6) производная

проекция в направлении \mathbf{n} будет вычислена в точке

$$p = \langle \mathbf{n}, \mathbf{s} \rangle = r_s \sin \theta \cos \varphi \cos \phi + r_s \sin \theta \sin \varphi \sin \phi = r_s \sin \theta \cos(\varphi - \phi) \quad (11)$$

Отсюда максимальное значение p , для которого может быть вычислена производная, в направлении \mathbf{n} равняется $r_s \sin \theta$. Тогда при данном расстоянии до источника на всём интервале $[-1; 1]$ могут быть вычислены только проекции для которых $|\theta| \geq \arcsin(1/r_s)$.

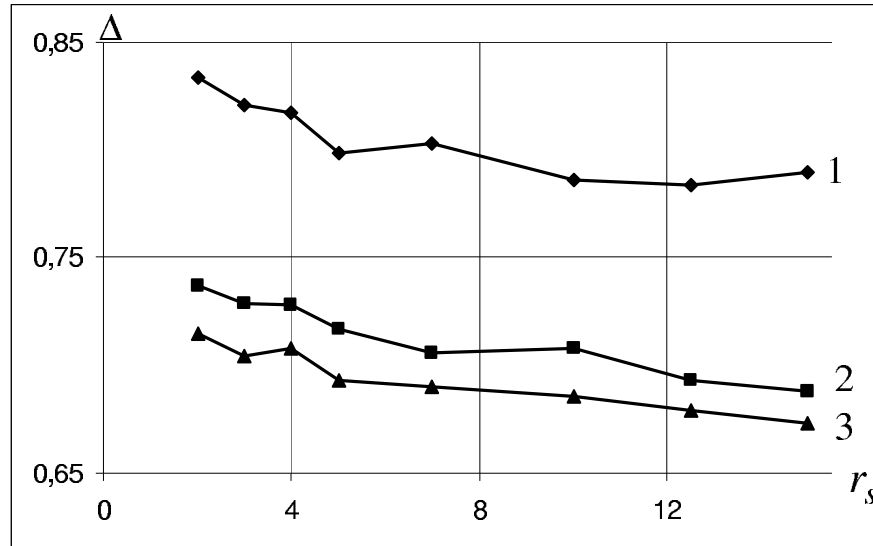


Рис. 1. Ошибка восстановления производной проекции от расстояния до источника

В проведённом вычислительном эксперименте вычислялось 660 одномерных проекций. Количество отсчетов по углу φ в интервале $[0^\circ; 360^\circ[$ составляло 60, а по углу θ в интервале $\arcsin(1/r_s) \leq |\theta| \leq \pi/2 - 11$. На рис.1, рис.2 приведены результаты восстановления по этим данным производной одномерной проекции в направлении оси Z (т.е. для этой проекции этот вектор \mathbf{n} имеет координаты $(0, 0, 1)$). На рис.1 представлены зависимости нормированной среднеквадратичной ошибки Δ от расстояния r_s . Различными кривым соответствуют различные количества первых моментов, использованных для восстановления производной проекции, исходя из условия Кавальери. Для кривой 1 — $K = 10$, для кривой 2 — $K = 15$, для кривой 3 — $K = 20$. На рис.2 приведены зависимости ошибки Δ от параметра ξ , характеризующего уровень шума в проекционных данных. Шум предполагался гауссовским со средним равным нулю и переменной дисперсией, составляющей r_s процентов от значения проекции в данной точке. Расстояние до источника r_s для рис.2 равно 5.0. Нумерация кривых на рис.2 имеет тот же смысл, что и на рис.1.

Также была проведена реконструкция предлагаемым в работе методом функции $g(\mathbf{r})$ в слое $x = 0.2$ на сетке 256×256 узлов. Размер области реконструкции составлял 2.0×2.0 . Полученная томограмма сравнивалась с результатом реконструкции алгоритмом Фельдкампа [6]. Среднеквадратичная ошибка реконструкции в этом слое для этих методов составила 0.486 и 0.574 соответственно.

5. Заключение

В работе предложен и теоретически обоснован новый метод трёхмерной томографической реконструкции по проекционным данным, полученным для неполной траектории

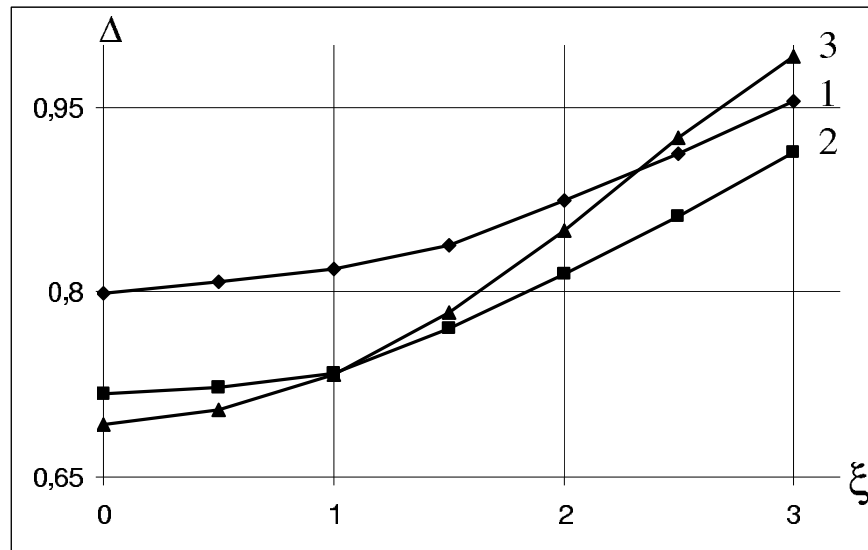


Рис. 2. Ошибка восстановления производной проекции от уровня шума

источника. Для случая, когда траектория источника является окружностью, был проведён вычислительный эксперимент. Он показал, что первая производная трёхмерного преобразования Радона может быть восстановлена предлагаемым методом с приемлемой точностью в тех областях, где она не может быть получена из имеющихся данных посредством теоремы Гранжа. Кроме того, было установлено, что в рассматриваемом случае предлагаемый метод обеспечивает меньшую ошибку реконструкции, чем алгоритм Фельдкамп.

Список литературы

- [1] ТУУ Н.К. An inversion formula for cone-beam reconstruction. // SIAM J. Applied Mathematics. 1983. Vol. 43, N 3. P.546–552.
- [2] ГЕЛЬФАНД И.М., ГРАЕВ М.И., ВИЛЕНКИН Н.Я. Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет, 2000. 208 с.
- [3] ВАЖЕНЦЕВА Н.В., ЛИХАЧЕВ А.В. Новый метод повышения точности томографической реконструкции при ограниченном угле сканирования. // III Евразийский конгресс по медицинской физике и инженерии, Москва, 2010. Т. 1. С.30–32.
- [4] НАТТЕРЕР Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
- [5] GRANGEAT P. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. // Int. Conf. Mathematical Methods in Tomography, Oberwolfach, Germany, 1990. P.66-97.
- [6] FELDKAMP L.A., DAVIS L.C., KRESS J.W. Practical cone-beam algorithm // J. Opt. Soc. Amer. A. 1984. Vol. 1, N 6. P.612–619.