

О термокапиллярной неустойчивости жидкого цилиндра, обдуваемого потоком газа *

И.И. РЫЖКОВ

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

e-mail: rii@icm.krasn.ru

Рассматривается термокапиллярная конвекция в бесконечном жидком цилиндре, окруженном коаксиальным слоем газа с контролируемым расходом. В слое задан постоянный осевой градиент температуры. Найдено точное решение уравнений движения, описывающее стационарное течение в данной двухфазной системе. Исследована устойчивость этого решения относительно малых возмущений. Проведено сравнение результатов для случаев деформируемой и недеформируемой границы раздела между жидкостью и газом.

1. Введение

Исследование динамики двухфазных систем с границами раздела вида жидкость–газ является одной из сложных проблем механики сплошной среды. Термокапиллярные течения, возникающие на границе раздела за счет сил поверхностного натяжения, могут оказывать влияние на движение жидкости или газа в объеме [1]. Течения на межфазной границе играют важную роль в таких процессах, как движение жидких пленок, распространение струй, эволюция волн в океанах.

Термокапиллярный эффект оказывает существенное влияние на рост кристаллов методом зонной плавки [2]. Для изучения процессов в зоне расплава часто используется модель жидкого моста, в которой объем жидкости помещен между двумя цилиндрическими стержнями с различной температурой. Градиент поверхностного натяжения на свободной границе вызывает термокапиллярное течение, которое является стационарным при небольшой разности температур. Увеличение последней приводит к неустойчивости в виде стоячих или бегущих гидротепловых волн. Аналогичная неустойчивость в зоне расплава ухудшает качество кристалла в методе зонной плавки.

Линейный анализ устойчивости стационарного термокапиллярного течения в бесконечном жидком мосте был выполнен в [3]. Экспериментальные исследования неустойчивости в длинном жидком мосте в условиях микрогравитации проводились в [4]. Полученные результаты достаточно хорошо согласуются с теоретическими данными [3]. Последние исследования [5] показали, что теплообмен жидкого моста с окружающим газом и наличие течений в газе существенно влияют на устойчивость термокапиллярного движения. Влияние вынужденного движения газа на устойчивость конвекции в жидком цилиндре было теоретически изучено в [6]. Данная работа обобщает исследования, начатые в [6], на случай деформируемой границы раздела жидкость–газ.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00283-а) и Интеграционного проекта СО РАН № 116.

2. Постановка задачи

Рассмотрим слой жидкости, окруженный слоем газа, который, в свою очередь, ограничен твердой стенкой $R = R_g$ (Рис. 1). Граница раздела между жидкостью и газом описывается уравнением $\Gamma = R - R_l - F(t, \varphi, z) = 0$, где функция F характеризует отклонение границы от цилиндрической поверхности радиуса R_l . Слои неограничены в вертикальном направлении Z , при этом в жидкости и газе вдоль оси Z приложен постоянный градиент температуры $\partial T / \partial Z = A > 0$. Предполагается, что осуществляется прокачка газа через слой с заданным расходом Q^G через поперечное сечение $z = \text{const}$.

Течения в слоях описываются векторами скорости $\mathbf{U}^{l,g}$, температурами $T^{l,g}$ и давлениями $P^{l,g}$, где индексы l и g относятся к жидкости и газу соответственно. Жидкость и газ характеризуются плотностями $\rho^{l,g}$, динамическими вязкостями $\mu^{l,g}$, коэффициентами теплопроводности $\kappa^{l,g}$ и температуропроводности $\chi^{l,g}$, которые предполагаются постоянными. Движение жидкости и газа в условиях невесомости описываются уравнениями Навье–Стокса и переноса тепла (предполагается, что характерная скорость газа много меньше скорости звука). Зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры на границе раздела считается линейной: $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$, где T_0 — температура твердой стенки на окружности $Z = 0$.

На границе раздела $R = R_l + F(t, \varphi, z)$ должны быть выполнены условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^l &= \mathbf{U}^g \equiv \mathbf{U}, \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \Gamma &= 0, \\ (\mathcal{P}^l - \mathcal{P}^g) \mathbf{n} &= 2H\sigma \mathbf{n} + \nabla_{\Gamma} \sigma, \\ T^l &= T^g, \quad \kappa^l \frac{\partial T^l}{\partial \mathbf{n}} = \kappa^g \frac{\partial T^g}{\partial \mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{U} — вектор скорости на границе раздела, $\mathcal{P}^{l,g} = -p^{l,g} E + 2\mu^{l,g} D(\mathbf{U}^{l,g})$ — тензоры напряжений в жидкости и газе, $D(\mathbf{U}^{l,g})$ — тензоры скоростей деформации, H — средняя кривизна поверхности раздела, ∇_{Γ} — поверхностный градиент, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к границе раздела (рис. 1).

При $R = 0$ предполагается ограниченность всех величин

$$|\mathbf{U}^l|, |T^l|, |P^l| < \infty \quad (2)$$

На стенке внешнего цилиндра $R = R_g$ ставятся следующие условия:

$$\mathbf{U}^g = (0, 0, U_0), \quad T = AZ + T_0, \quad (3)$$

где U_0 — постоянная скорость движения стенки вдоль оси Z . В дальнейшем будет показано, что в случае однонаправленного движения жидкости и газа вдоль оси Z эта

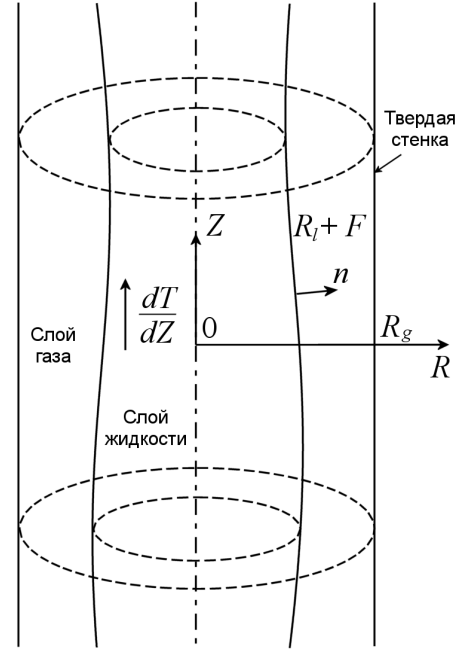


Рис. 1. Схема области течения.

скорость не является независимым параметром и определяется через остальные параметры задачи.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} R &= R_l r, & Z &= R_l z, & \mathbf{U}^{l,g} &= \frac{\sigma_T A R_l}{\mu^l} \mathbf{u}^{l,g}, \\ T^{l,g} - T_0 &= A R_l \Theta^{l,g}, & P^{l,g} &= \sigma_T A p^{l,g}, & F &= R_l f, \end{aligned}$$

при этом масштаб времени выберем как $\mu^l / \sigma_T A$. Далее, введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , в которой вектора скорости имеют вид $\mathbf{u}^{l,g} = (u_r^{l,g}, u_\varphi^{l,g}, u_z^{l,g})$. Система характеризуется безразмерными параметрами

$$\begin{aligned} \text{Ma} &= \frac{\sigma_T A R_l^2}{\mu^l \chi^l}, & \text{Pr}^l &= \frac{\mu^l}{\rho^l \chi^l}, & \text{Ca} &= \frac{\sigma_T A R_l}{\sigma_0}, \\ \rho &= \frac{\rho^g}{\rho^l}, & \mu &= \frac{\mu^g}{\mu^l}, & \kappa &= \frac{\kappa^g}{\kappa^l}, & \chi &= \frac{\chi^g}{\chi^l}, & \gamma &= \frac{R_g}{R_l}, \end{aligned}$$

где Ma – число Марангони, Pr^l – число Прандтля для жидкости, Ca – капиллярное число, ρ, μ, κ, χ – отношения соответствующих физических свойств для газа и жидкости, γ – отношение радиусов.

3. Основное стационарное движение

Рассмотрим стационарное осесимметричное течение жидкости и газа в направлении вертикальной оси Z , общий вид которого дается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{l0} &= (0, 0, w^{l0}(r)), & \Theta^{l0} &= z + \Theta^{l0}(r), & p^{l0} &= Lz + p_0^l \\ \mathbf{u}^{g0} &= (0, 0, w^{g0}(r)), & \Theta^{g0} &= z + \Theta^{g0}(r), & p^{g0} &= Gz + p_0^g \end{aligned} \quad (4)$$

где L, G, p_0^l, p_0^g – некоторые постоянные. Предполагается, что для стационарного движения граница раздела жидкость–газ является цилиндрической поверхностью радиуса $R = R_l$.

Потребуем, чтобы расход жидкости через любое поперечное сечение $z = \text{const}$ был равен нулю

$$\int_0^1 r w^{l0}(r) dr = 0 \quad (5)$$

Это условие выполняется в реальном жидком мосте, ограниченном в осевом направлении двумя стержнями. Далее, будем предполагать, что задан постоянный расход газа через поперечное сечение $z = \text{const}$

$$Q^g = 2\pi \int_1^\gamma r w^{g0}(r) dr \quad (6)$$

Для того, чтобы исключить зависимость безразмерного расхода газа от градиента температуры A , определим его по формуле $Q = 10^{-4} \text{Ma} Q^g$. В этом случае размерный расход газа дается выражением $Q^G = 10^4 R_l \chi^l Q$.

Подставляя представление (4) в уравнения движения и удовлетворяя условия (1)–(3), (5), (6), найдем решение

$$\begin{aligned} w^{l0} &= \frac{G-1}{4} \left(r^2 - \frac{1}{2} \right), & w^{g0} &= \frac{G}{4\mu} (r^2 + 2 \ln r) + \frac{G-1}{8} - \frac{G}{4\mu}, \\ p^{l0} &= (G-1)z + p_0^g + \frac{1}{\text{Ca}} + \frac{\text{Ma}}{64\chi} \left(\frac{3G+8}{\mu} + 2 - 2G \right) - A_2, & p^{g0} &= Gz + p_0^g, \\ \Theta^{l0} &= \frac{\text{Ma}(G-1)}{64} (r^4 - 2r^2) + A_3 + z, \\ \Theta^{g0} &= \frac{\text{Ma}}{64\chi} r^2 \left(\frac{G}{\mu} r^2 + \frac{8}{\mu} (\ln r - 1) + 2G - 2 - \frac{4G}{\mu} \right) + A_1 \ln r + A_2 + z, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\text{Ma}}{16\chi} \left(1 - G + \frac{G+2}{\mu} \right), & A_3 &= \frac{\text{Ma}}{64} \left[(G-1) \left(1 + \frac{2}{\chi} \right) - \frac{3G+8}{\mu\chi} \right] + A_2, \\ A_2 &= \frac{\text{Ma}}{64\chi} \left[4 \left(G-1 - \frac{2\gamma^2+2+G}{\mu} \right) \ln \gamma + 2 \left(\frac{2G+4}{\mu} - G+1 \right) \gamma^2 - \frac{G\gamma^4}{\mu} \right]. \end{aligned}$$

В решении (7) постоянная p_0^g определяет давление газа в плоскости $z = 0$. Безразмерный градиент давления в газе определяется через расход газа Q по формуле

$$G = \frac{8\mu 10^4 (\pi \text{Ma})^{-1} Q + (\gamma^2 - 1)(\mu + 2) - 4\gamma^2 \ln \gamma}{\gamma^2(\gamma^2 + \mu - 2) - \mu + 1}.$$

Заметим, что скорость движения твердой стенки в направлении оси Z (см. условие (3)) определяется значением функции w^{g0} при $r = \gamma$.

В качестве примера рассмотрим двухфазную систему силиконовое масло (2 сСт) – воздух в цилиндрических слоях с отношением радиусов $\gamma = 2$. Физические свойства этой системы характеризуются следующими параметрами: $\rho = 0.00136$, $\mu = 0.01087$, $\kappa = 0.26139$, $\chi = 331.32$, $\text{Pr}^l = 29.41$ [6]. Профили скорости и температуры в жидкости и газе для данной системы приведены на Рис. 2. При отсутствии прокачки газа ($Q = 0$) жидкость движется в направлении градиента поверхностного натяжения вблизи границы раздела и в противоположном направлении около оси $r = 0$. Такое движение в сочетании с осевым градиентом температуры приводит к появлению градиента температуры в радиальном направлении. Движение газа обусловлено движением жидкости на границе раздела и движением внешней твердой стенки в отрицательном направлении оси z . В случае прокачки газа через слой ($Q = 0.1$) в положительном направлении оси z , скорость газа в центре слоя растет, а абсолютная величина скорости жидкости незначительно уменьшается (это уменьшение незаметно в масштабе рисунка 2а).

4. Задача об устойчивости

Рассмотрим задачу об устойчивости основного стационарного движения (7) относительно малых возмущений в линейном приближении. Поля температуры, скорости и давления представляются в виде суммы основного состояния и малых возмущений

$$\mathbf{u}^{l,g} = \mathbf{u}^{l0,g0} + \tilde{\mathbf{u}}^{l,g}, \quad p^{l,g} = p^{l0,g0} + \tilde{p}^{l,g}, \quad \Theta^{l,g} = \Theta^{l0,g0} + \tilde{\Theta}^{l,g}.$$

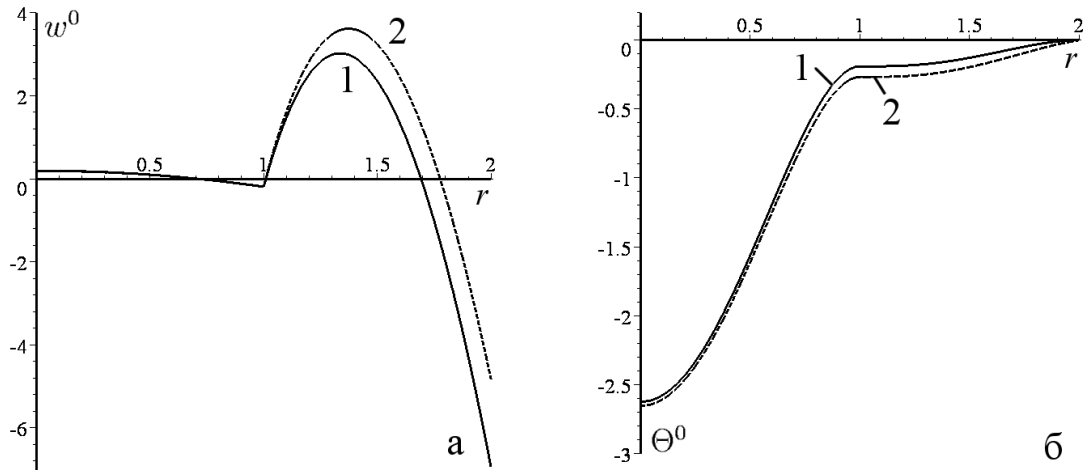


Рис. 2. Профили скорости (а) и температуры (б) для расходов газа $Q = 0$ (кривая 1) и $Q = 0.1$ (кривая 2), $Ma = 100$.

Положение возмущенной границы раздела описывается уравнением $r = 1 + \tilde{f}(r, \varphi, z)$. Подставим эти выражения в уравнения движения и граничные условия (1)–(3) и линеаризуем их относительно основного состояния. Малые возмущения будем искать в виде нормальных волн

$$(\tilde{\mathbf{u}}^{l,g}, \tilde{p}^{l,g}, \tilde{\Theta}^{l,g}, \tilde{f}) = (u_{l,g}(r), v_{l,g}(r), w_{l,g}(r), p_{l,g}(r), \theta_{l,g}(r), \xi) \exp(-\lambda t + i(kz + m\varphi)), \quad (8)$$

где $\lambda = \lambda_r + i\omega$ — комплексный декремент, k и m — волновые числа в направлениях z и φ соответственно, ξ — некоторая постоянная. Подстановка выражений (8) в линеаризованные уравнения движения и граничные условия приводит к краевой задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих амплитуды возмущений в жидкости и газе. Для постановки граничных условий вблизи оси $r = 0$ используются соответствующее асимптотическое разложение [3]. Условия на деформируемой границе раздела сносятся на поверхность цилиндра $r = 1$ [1]. Для решения задачи используется пошаговое интегрирование методом Рунге–Кутты–Мерсона пятого порядка с ортогонализацией. Спектр комплексных декрементов λ определяется из соответствующих условий на границе раздела. Свойства симметрии задачи позволяют считать $m \geq 0$, $k \geq 0$ [6].

На Рис. 3 показана зависимость критического числа Марангони от осевого волнового числа k для моды $m = 0$ в случае отсутствия прокачки газа через слой ($Q = 0$). Кривая 1 соответствует недеформируемой границе раздела. В случае деформируемой границы раздела (кривая 2) нейтральная кривая имеет минимум $Ma = 0$ в точке $k = 1$. Данному значению безразмерного волнового числа соответствует размерная длина волны $2\pi R_l$. Таким образом, если длина жидкого цилиндра превышает указанную величину (предел Рэлея), то данный цилиндр является неустойчивым и разрушается.

В работе была исследована зависимость критического числа Марангони от расхода газа для недеформируемой границы раздела. Установлено, что если направление обдува противоположно направлению термокапиллярного движения на границе раздела, то увеличение расхода газа повышает порог устойчивости системы. Если же направление обдува совпадает с направлением термокапиллярного течения, то порог устойчивости

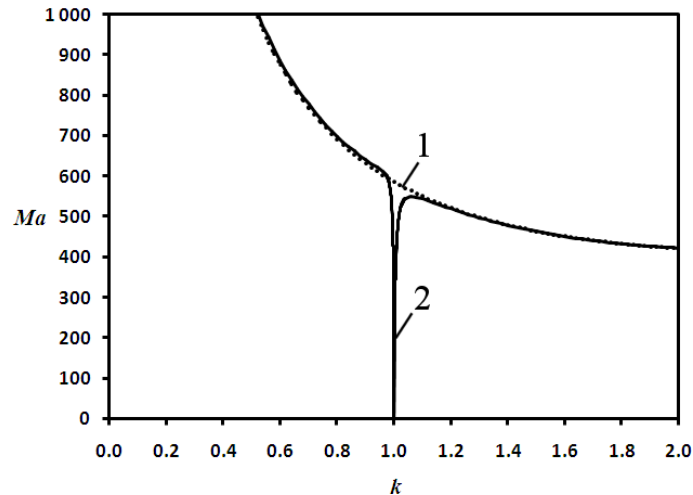


Рис. 3. Нейтральные кривые для моды $m = 0$ в случае недеформируемой (1) и деформируемой (2) границы раздела. Расход газа $Q = 0$.

понижается при увеличении расхода газа. Для деформируемой границы раздела наблюдается аналогичная ситуация в случае не слишком больших расходов газа.

Список литературы

- [1] АНДРЕЕВ В.К., ЗАХВАТАЕВ В.Е., РЯБИЦКИЙ Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 280 с.
- [2] KUHLMANN H.C. THERMOCAPILLARY CONVECTION IN MODELS OF CRYSTAL GROWTH. Berlin: Springer, 1999.
- [3] XU J-J. DAVIS S.H. Convective thermocapillary instabilities in liquid bridges // *Phys. Fluids*. 1984. V. 27. № 5. p. 1102–1107.
- [4] SCHWABE D. Hydrothermal waves in a liquid bridge with aspect ratio near the Rayleigh limit under microgravity // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17. № 11. 112104.
- [5] IRIKURA M., ARAKAWA Y., UENO I., KAWAMURA H. Effect of ambient fluid flow upon onset of oscillatory thermocapillary convection in half-zone liquid bridges // *Microgravity Sci. and Techn.* 2005. V. 16. № 1. P. 176–180.
- [6] РЫЖКОВ И.И. Устойчивость термокапиллярной конвекции в двухфазной системе с цилиндрической симметрией // *Известия РАН: МЖГ*. 2010. № 6. с. 38–52.