

Нелинейная модель Максвелла конечных деформаций упрочняющихся материалов

Е.И. РОМЕНСКИЙ

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

e-mail: evrom@math.nsc.ru

Ф. БАРТОН

Калифорнийский технологический институт

e-mail: ptbarton@caltech.edu

В рамках нелинейной модели Максвелла конечных деформаций неупругой среды [1] предложен подход к описанию упрочняющихся материалов, где в качестве параметра упрочнения используется энтропия пластической деформации. Такой подход позволяет избежать введения дополнительных параметров состояния (таких как, например, интенсивность пластических деформаций), отвечающих за упрочнение. Определяющие дифференциальные уравнения модели образуют гиперболическую систему, все уравнения которой имеют дивергентный вид, что позволяет применять известные численные методы высокой точности. С использованием имеющихся в литературе экспериментальных данных по деформированию медных упрочняющихся образцов построены замыкающие соотношения модели (уравнение состояния, зависимость времени релаксации от касательных напряжений и пластической энтропии). Обсуждаются результаты численных расчетов о соударении пластин и о соударении цилиндрического ударника с жесткой стенкой

Для моделирования конечных деформаций происходящих в твердых тела при интенсивных воздействиях, таких как взрывное нагружение, весьма привлекательной оказывается нелинейная модель Максвелла [1]. Данная модель описывает деформирование материалов в широком диапазоне скоростей деформации и температур, что обеспечивается нелинейной зависимостью максвелловского времени релаксации от интенсивности касательных напряжений и температуры. Она успешно применялась при анализе ряда задач имеющих практическое применение, таких как распространение ударных волн в металлах, задачи пробивания, электрический взрыв проводников [2, 3, 4]. Важным достоинством модели является то, что ее определяющие уравнения являются гиперболическими и могут быть записаны в дивергентном виде, что дает возможность применения разработанных математических методов и высокоточных численных алгоритмов для их решения.

Применение модели Максвелла к упрочняющимся материалам требует введения новых внутренних переменных, и формулировки тех или иных дифференциальных уравнений. Так, например, в [5] в качестве такой переменной выбрана пластическая деформация и подобраны замыкающие соотношения для ряда материалов с упрочнением описывающие экспериментальные данные по деформированию стержней. Пластические деформации действительно являются параметром характеризующим упрочнение, но их использование в общем случае трехмерных деформаций затруднительно при построении замыкающих соотношений. Мы предлагаем строить модель упрочняющихся материалов используя энтропию, возникающую при пластических деформациях. Эта

энтропия является количественной характеристикой пластических деформаций и естественным образом включается в систему определяющих дифференциальных уравнений. Заметим, что она отличается от полной энтропии, возникающей в процессе деформирования среды.

1. Дифференциальные уравнения модели

Данный параграф кратко описывает дифференциальные уравнения нелинейной релаксационной модели Максвелла в дивергентной форме (детали могут быть найдены в [6, 7]). Состояние среды в трехмерной декартовой системе координат $x_i (i = 1, 2, 3)$ будем характеризовать параметрами u_i - вектор скорости, F_{ij} - тензор градиента эффективных упругих деформаций, \mathcal{S} - энтропия, которые удовлетворяют системе уравнений в дивергентной форме состоящей из законов баланса импульса, тензора деформаций и энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_k - \sigma_{ik})}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \rho F_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho F_{ij} u_k - u_i \rho F_{kj})}{\partial x_k} &= -u_i \beta_j + \rho \varphi_{ij}, \\ \frac{\partial \rho (\mathcal{E} + u_i u_i / 2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_k (\mathcal{E} + u_i u_i / 2) - u_i \sigma_{ik})}{\partial x_k} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что внутренняя энергия – известная функция градиента деформаций и энтропии:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{F}, \mathcal{S}).$$

При этом тензор напряжений Коши вычисляется по формуле

$$\sigma_{ij} = \rho F_{ik} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial F_{jk}},$$

где плотность связана с деформациями как $\rho = \rho_0 / \det|\mathbf{F}|$, ρ_0 - плотность ненапряженного начального состояния.

Вектор β_j в правой части уравнения для F_{ij} является вспомогательной переменной, вводится для того, чтобы записать это уравнение в дивергентной форме, и выражается следующим образом $\beta_j = \partial \rho F_{kj} / \partial x_k$. В действительности, для β_j выполняется условие совместности вида

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial t} + \frac{\partial (u_k \beta_j + \rho \varphi_{kj})}{\partial x_k} = 0,$$

что позволяет трактовать $u_i \beta_j$ в уравнении для F_{ij} как младший член уравнения [7]. Заметим, что из уравнений для эффективных упругих деформаций вытекает уравнение неразрывности (дифференциальная форма закона сохранения массы), которое используется при численном решении уравнений вместо одного уравнения для F_{ij} .

Система дифференциальных определяющих уравнений (1) является гиперболической, все ее уравнения имеют дивергентную форму, что позволяет применять известные математические методы и численные алгоритмы для решения различных начально-краевых задач.

Тензор φ_{ij} задает скорость неупругих деформаций, которую мы моделируем путем максвелловской релаксационной модели с временем релаксации нелинейно зависящим от параметров состояния среды. В данной работе мы используем представление

$$\varphi := -\frac{1}{\tau} \mathbf{H}' \mathbf{F}.$$

Здесь $\mathbf{H} = \mathbf{U} (\ln \mathbf{K}^e) \mathbf{U}^T$ - логарифмический тензор деформаций Генки, где \mathbf{U} ортогональная матрица, $\mathbf{K} = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$ - диагональная матрица с коэффициентами сжатия-растяжения k_i , $i = 1, 2, 3$ на диагонали, а $\mathbf{H}' := \mathbf{H} - (\text{Tr} \mathbf{H}) \mathbf{I} / 3$ - девиатор матрицы \mathbf{A} . Матрицы \mathbf{U} и \mathbf{K} входят в декомпозицию тензора упругого градиента деформаций следующим образом как

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{K} \mathbf{V},$$

Следствием системы является уравнение энтропии

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_k} = \frac{1}{T} \left(\frac{d\mathcal{E}(\mathbf{F}^e, \mathcal{S})}{d\mathbf{F}^e} \right) \Big|_{\mathcal{S}} : \varphi, \quad (2)$$

где $T = \partial \mathcal{E} / \partial \mathcal{S}$ - температура. Правая часть этого уравнение определяет производство энтропии и для выбранной модели неупругого деформирования является неотрицательной, обеспечивая выполнение второго закона термодинамики.

Подчеркнем, что уравнение (2) выполнено только на гладких решениях. Для разрывных решений, таких как упругие ударные волны, рост энтропии определяется законом сохранения энергии. Поэтому имеет смысл разделить полную энтропию и энтропию пластического деформирования, которая как раз и определяется из уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{S}^p}{\partial t} + u_k \frac{\partial \mathcal{S}^p}{\partial x_k} = \frac{1}{T(\rho, \mathcal{S})} \left(\frac{d\mathcal{E}(\mathbf{F}^e, \mathcal{S})}{d\mathbf{F}^e} \right) \Big|_{\mathcal{S}} : \varphi(\mathbf{F}^e, \mathcal{S}, \mathcal{S}^p),$$

При этом понятно, что $\mathcal{S}^p \leq \mathcal{S}$.

2. Замыкающие соотношения

Для замыкания модели необходимо задать уравнение состояния (плотность внутренней энергии) и время релаксации как функции параметров состояния. Уравнение состояния задается в виде следующей зависимости внутренней энергии функции от инвариантов тензора Фингера $\mathbf{G} = (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{F}^{-1}$ и энтропии \mathcal{S} :

$$\mathcal{E}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3, \mathcal{S}) = \frac{K_0}{2\alpha^2} (\mathcal{I}_3^{\alpha/2} - 1)^2 + C_V T_0 \mathcal{I}_3^{\gamma/2} \left[\exp \left(\frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}_0}{C_V} \right) - 1 \right] + \frac{B_0}{2} \mathcal{I}_3^{\beta/2} (\mathcal{I}_1^2 / 3 - \mathcal{I}_2),$$

где инварианты вычисляются по формулам $\mathcal{I}_1 = \text{Tr}(\mathbf{G})$, $\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2} [(\text{Tr}(\mathbf{G}))^2 - \text{Tr}(\mathbf{G}^2)]$, $\mathcal{I}_3 = \det|\mathbf{G}| = (\rho/\rho_0)^2$. Здесь $K_0 = c_0^2 - (4/3)b_0^2$, $B_0 = b_0^2$ объемная и сдвиговые скорости звука, C_V - теплоемкость при постоянном объеме, α, β, γ - константы, характеризующие нелинейный характер скоростей звука и температуры от плотности.

Время релаксации касательных напряжений предполагается функцией их интенсивности $\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$, где σ_i - главные напряжения. В предположении, что упрочнение сопутствует работе пластических деформаций, характеристикой которой является пластическая энтропия, представляется разумным предполагать время релаксации зависящим также от пластической энтропии \mathcal{S}^p .

Можно показать, что в процессе однородного деформирования стержня вызванного напряжением σ_1 направленном вдоль стержня (модель стержня Гопкинсона) выполняется соотношение

$$\epsilon^p \sim C_{\epsilon^p} \left(\frac{(\mathcal{J}/C_V)}{\sigma_1} \right).$$

где C_{ϵ^p} - константа. Основываясь теперь на функциональной зависимости времени релаксации τ от пластической деформации, предложенной в [5], можно получить следующую формулу для τ :

$$\tau = \tau_0 \left[N_0 + M \left(C_{\epsilon^p} \frac{\mathcal{J}}{C_V \sigma} \right) \right]^{-1} \exp \left\{ \frac{1}{\sigma} \left[D + H \left(C_{\epsilon^p} \frac{\mathcal{J}}{C_V \sigma} \right)^n \right] \right\}.$$

На Рис. 1 приведены результаты расчетов деформации стержня с различными скоростями деформации в сравнении с экспериментальными данными из [8] для меди. Параметры уравнения состояния выбирались следующими:

$\rho_0 = 8.93 \text{ г/см}^3$, $c_0 = 4.6 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$, $b_0 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ см/сек}$, $C_V = 3.9 \text{ кДж/г/К}^{-1}$, $T_0 = 300 \text{ К}$, $\alpha = 1.0$, $\beta = 3.0$, $\gamma = 2.0$

Параметры времени релаксации брались такими: $\tau_0 = 8.5 \cdot 10^{-6} \text{ мксек см}^2$, $N_0 = 10^9 \text{ см}^2$, $M = 10^{11} \text{ см}^2$, $D = 0.79 \text{ ГПа}$, $H = 21.1 \text{ ГПа}$, $C_{\epsilon^p} = 1.38$, $n = 0.49$.

Видно хорошее совпадение экспериментальных и расчетных кривых.

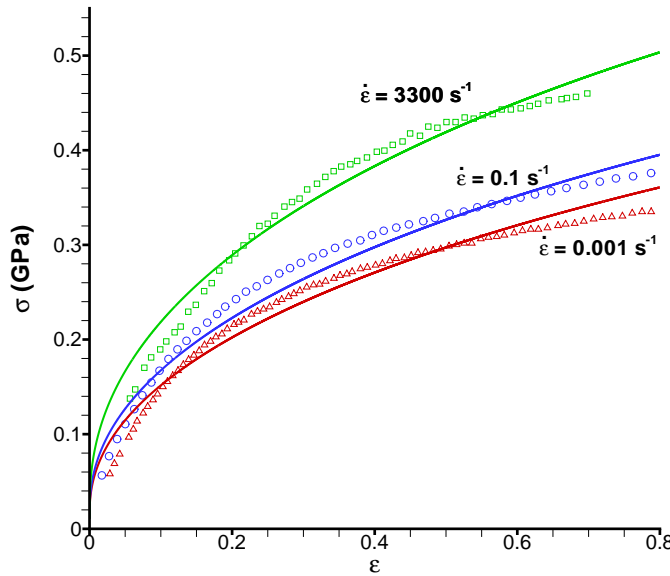


Рис. 1. Сравнение кривых напряжение-деформация полученных из расчетов задачи о деформировании стержня с экспериментальными данными для скоростей деформаций $\dot{\epsilon} = 0.001; 0.1; 3300 \text{ сек}^{-1}$

3. Численный метод и расчеты

Для решения сформулированной в предыдущих параграфах системы уравнений был разработан численный алгоритм типа метода Годунова, основанный на WENO [9] ре-

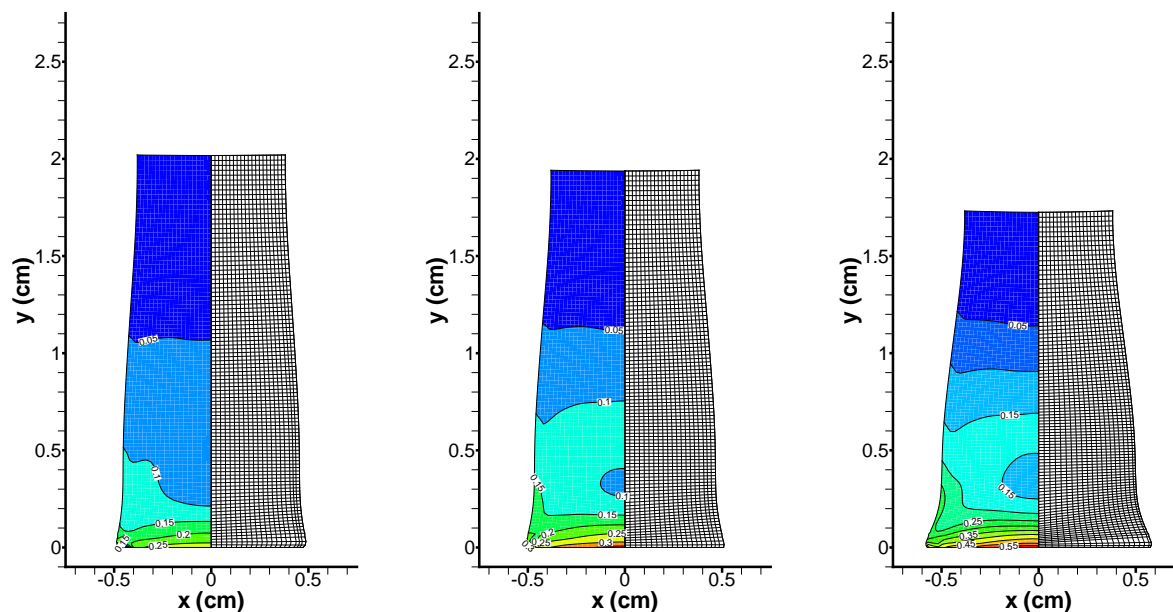


Рис. 2. Результаты расчетов соударения ударника с жесткой преградой. Показана сетка и контуры \mathcal{S}/c_V на финальный момент времени остановки ударника для начальных скоростей 130 м/сек, 146 м/сек, 190 м/сек .

конструкции третьего порядка точности с использованием решения линеаризованной задачи о распаде разрыва [10]. Метод применялся к уравнениям преобразованным к криволинейной системе координат; для интегрирования релаксационных членов применялся неявный алгоритм LSODE [11].

В качестве тестовых задач рассматривались одномерная задача о соударении пластин и двумерная осесимметричная задача о соударении ударника с жесткой преградой. Установлено, что использование пластической энтропии вместо полной энтропии в функциональной зависимости времени релаксации приводит к более точным результатам расчетов.

К качестве иллюстрации применения разработанной методики на Рис. 2 приведены результаты расчетов задачи о соударении ударника с жесткой преградой по ряду параметров дающие хорошее совпадение с экспериментальными данными из [12].

Список литературы

- [1] Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная книга. 1998. 267 с.
- [2] Мерзиевский Л.А., Реснянский А.Д. Численное моделирование ударно-волновых процессов в металлах // ФГВ. 1984. Т. 20, № 5. С. 114-122.
- [3] Resnyanky A.D. DYNA-modelling of the high-velocity impact problems with a split-element algorithm // Int. J. Impact Eng. 2002. Vol 27, N 7. P. 709-727.
- [4] Доровский В.Н., Искольдский А.М., Роменский Е.И. Динамика импульсного нагрева металла током и электрический взрыв проводников // ПМТФ. 1983. Т. 24, № 6, С. 10-25.

- [5] Мержиевский Л.А., Палецкий А. В. Расчет диаграмм динамического деформирования металлов и сплавов // Физическая мезомеханика. 2001. Т. 4, № 3, С. 85-96.
- [6] Romenski E.I. Thermodynamics and hyperbolic systems of balance laws in continuum mechanics // Intern. Conf. Godunov Methods: Theory and Applications. Kluwer Academic/Plenum Publishers. 2001. P 745-761.
- [7] Barton P.T, Drikakis D., Romenski E. An Eulerian finite-volume scheme for large elastoplastic deformations in solids // Int. J. Num. Meth. Eng. 2010. Vol. 81, N 4. P. 453-484.
- [8] Guo W.-G. Flow stress and constitutive model of OFHC Cu for large deformation, different temperatures and different strain rates // Baozha Yu Chongji/Explosion and Shock Waves. 2005. Vol. 25, N 3. P. 244-256.
- [9] Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comp. Phys. 1996. Vol. 126, N 1. P. 202-228.
- [10] Barton P. T., Drikakis D., Romenski E., Titarev V. A. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 228 N 18. P. 7046-7068.
- [11] Radhakrishnan K., Hindmarsh A. C. Description and use of LSODE, the Livermore solver for ordinary differential equations // LLNL report UCRL-ID-113855, 1993.
- [12] Zerilli F. J., Armstrong R. W. Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics // J. Appl. Phys. 1987. Vol. 61, N 5. P. 1816-1825.