

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫРОЖДЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПАКТНЫХ СХЕМ

Д.Б. ЖАКЕБАЕВ, А.У. АБДИБЕКОВ

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

e-mail: daurjaz@mail.ru, abugamil@mail.ru

В работе рассматривается моделирование вырождения изотропной турбулентности. Для моделирования турбулентного процесса используется отфильтрованное нестационарное трехмерное уравнение Навье-Стокса. Основное уравнение замыкается динамической моделью. Задача решается численным методом, при этом уравнение движения решается модифицированным методом дробных шагов с использованием компактных схем, уравнение для давления решается методом Фурье с комбинацией матричной прогонкой. В процессе моделирования получены изменения кинетической энергии турбулентности по времени, микромасштаб турбулентности и изменение продольно-поперечных корреляционных функций, определены продольные и поперечные одномерные спектры.

Введение

Метод моделирования крупных вихрей является компромиссным вариантом между прямым численным моделированием и решением осредненных уравнений Навье-Стокса. Метод крупных вихрей основан на двух предположениях. Первое состоит в возможности разделения поля скорости на движения крупных и мелких вихрей, причем движения крупных вихрей может быть рассчитано отдельно, что связано с достаточной изотропностью и универсальностью мелких масштабов турбулентного движения. Второе предположения – в возможности аппроксимации нелинейных взаимодействий между крупными и мелкими вихрями только по крупным вихрям с использованием подсеточных моделей. Таким образом, крупномасштабные структуры решаются явно, а мелкомасштабные – моделируются на основе разных моделей и типов функций фильтров [1].

Постановка задачи

Численно моделировать изменение характеристик турбулентности по времени, то есть вырождение изотропной турбулентности при различных больших числах Рейнольдса. Численное моделирование задачи осуществляется на основе решения нестационарных отфильтрованных уравнений Навье-Стокса с уравнением неразрывности в декартовой системе координат. Для подсеточного моделирования применялась динамическая модель. Граничные условия во всех направлениях периодические. Начальные условия задается в фазовом пространстве для поля скоростей, которое удовлетворяет условию неразрывности, заданное начальное условие с фазового пространство переводится в

физическое пространство с использованием преобразования Фурье. Полученное поле скоростей используется как начальное условие для отфильтрованного уравнения Навье-Стокса.

1. Численный метод

Для решения уравнения Навье-Стокса используется схема расщепления по физическим параметрам, которая состоит из трех этапов. На первом этапе решается уравнение Навье-Стокса без учета давления. Для аппроксимации конвективных и диффузионных членов уравнения используется компактная схема повышенного порядка точности [2].

Промежуточное поле скорости находится методом дробных шагов [3], при использовании метода прогонки. Рассмотрим метод дробных шагов для горизонтальной составляющей компоненты скорости u_1 в точке сетки $(i + 1/2, j, k)$. Для использования компактных схем модифицируем метод дробных шагов. Модифицируем первый этап:

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^* - \bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^n}{\tau} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_{1k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^* + \frac{1}{2}\Lambda_{1k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^n \right) + \Lambda_2\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^n + \Lambda_3\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^n \\ \frac{\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{3}} - \bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^*}{\tau} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_{1d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\Lambda_{1d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^n \right) \end{cases} \quad (1)$$

Где

$$\Lambda_{1k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = -\bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{u}_1) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}; \Lambda_{1d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}.$$

Второй этап:

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^* - \bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\tau} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_{2k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^* + \frac{1}{2}\Lambda_{2k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{3}} \right) - \Lambda_2\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^n \\ \frac{\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{2}{3}} - \bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^*}{\tau} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_{2d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\Lambda_{2d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{3}} \right) \end{cases} \quad (2)$$

Где

$$\Lambda_{2k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = -\bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u}_1) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}; \Lambda_{2d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}.$$

Третий этап:

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^* - \bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\tau} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_{3k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^* + \frac{1}{2}\Lambda_{3k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{2}{3}} \right) - \Lambda_3\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^n \\ \frac{\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - \bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^*}{\tau} = \left(\frac{1}{2}\Lambda_{3d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} + \frac{1}{2}\Lambda_{3d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{2}{3}} \right) \end{cases} \quad (3)$$

Где

$$\Lambda_{3k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = -\bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} (\bar{u}_1) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}; \Lambda_{3d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_3} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}.$$

Используем с разностями против потока и компактную схему и получим схему высокого порядка точности:

Компактная схема для конвективных членов уравнений, при $A > 0$:

$$\Lambda_{1k}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = -\bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{u}_1) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}. \quad (4)$$

Традиционное представление аппроксимации производной (4) имеет вид

$$f_{i,j,k} = \Lambda_{1k}\bar{u}_{1i,j,k} = -\frac{Au_{1i,j,k} - Au_{1i-1,j,k}}{\Delta x}; A = \bar{u}_{1i,j,k}. \quad (5)$$

В отличие от (5), компактная аппроксимация соотношения (5) может быть записана следующим образом:

$$\alpha \cdot f_{i+1,j,k} + \beta \cdot f_{i,j,k} + \gamma \cdot f_{i-1,j,k} = \Lambda_1 u_{i,j,k} \quad (6)$$

Подберем неопределенные коэффициенты так, чтобы выполнялось соотношение (7)

$$\left| (\alpha \cdot f_{i+1,j,k} + \beta \cdot f_{i,j,k} + \gamma \cdot f_{i-1,j,k}) - \left(-\frac{Au_{i,j,k} - Bu_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right) \right| = O(h^3) \quad (7)$$

Для этого подставим в (7) разложения в ряды Тейлора функций $f(x,y,z)$ и $u(x,y,z)$ в точке $x = x_i$:

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot \left(f_i + \Delta x f_x + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} f_{xxxx} \right) + \beta \cdot f_i + \\ & + \gamma \cdot \left(f_i - \Delta x f_x + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} f_{xxxx} \right) = \\ & = -\frac{A}{\Delta x} u_{i,j,k} + \frac{A}{\Delta x} \left(u_i - \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx} \right) + O(h^4) \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) получим систему:

$$\begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma) = -A \\ (\alpha - \gamma) = \frac{A}{2} \\ (\alpha + \gamma) = -\frac{A}{3} \end{cases} \quad (9)$$

Решая систему (8), определим:

$$\alpha = \frac{A}{12}, \quad \beta = -\frac{2A}{3}, \quad \gamma = -\frac{5A}{12} \quad (10)$$

Компактная схема для диффузионных членов уравнений:

$$\Lambda_{1d}\bar{u}_{1i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} \quad (11)$$

Традиционное представление аппроксимации производной (11) имеет вид

$$f_{i,j,k} = \Lambda_{1k}\bar{u}_{1i,j,k} = \left(\frac{1}{Re} \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right). \quad (12)$$

компактная аппроксимация соотношения (12):

$$\alpha \cdot f_{i+1,j,k} + \beta \cdot f_{i,j,k} + \gamma \cdot f_{i-1,j,k} = \Lambda_{1d} u_{i,j,k} \quad (13)$$

Подберем неопределенные коэффициенты так, чтобы выполнялось соотношение (14).

$$\left| (\alpha \cdot f_{i+1,j,k} + \beta \cdot f_{i,j,k} + \gamma \cdot f_{i-1,j,k}) - \left(\frac{1}{Re} \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} \right) \right| = O(h^4) \quad (14)$$

разложения в ряды Тейлора:

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot \left(f_i + \Delta x f_x + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} f_{xxxx} \right) + \beta \cdot f_i + \\ & + \gamma \cdot \left(f_i - \Delta x f_x + \frac{\Delta x^2}{2} f_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} f_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} f_{xxxx} \right) = \\ & = \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta x^2} \left(u_i + \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx} \right) - \\ & - \frac{1}{Re} \frac{2}{\Delta x^2} u_{i,j,k} + \\ & + \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta x^2} \left(u_i - \Delta x u_x + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx} - \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx} + \frac{\Delta x^4}{24} u_{xxxx} \right) + O(h^4) \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) получим систему (16):

$$\begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{1}{Re} \\ (\alpha - \gamma) = 0 \\ (\alpha + \gamma) = \frac{1}{6} \frac{1}{Re} \end{cases} \quad (16)$$

Отсюда находим

$$\alpha = \frac{1}{12} \frac{1}{Re}, \quad \beta = \frac{5}{6} \frac{1}{Re}, \quad \gamma = \frac{1}{12} \frac{1}{Re} \quad (17)$$

Модифицируемый первый этап:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_k \bar{u}^*_{i+\frac{3}{2},j,k} + \beta_k \bar{u}^*_{i+\frac{1}{2},j,k} + \gamma_k \bar{u}^*_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\tau} - \frac{\alpha_k \bar{u}^n_{i+\frac{3}{2},j,k} + \beta_k \bar{u}^n_{i+\frac{1}{2},j,k} + \gamma_k \bar{u}^n_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\tau} = \\ & = \left(\frac{1}{2} \Lambda_{1k} \bar{u}^*_{1i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{1}{2} \Lambda_{1k} \bar{u}^n_{1i+\frac{1}{2},j,k} \right) + \Lambda_2 \bar{u}^n_{1i+\frac{1}{2},j,k} + \Lambda_3 \bar{u}^n_{1i+\frac{1}{2},j,k} \\ & \frac{\alpha_d \bar{u}^{n+\frac{1}{3}}_{i+\frac{3}{2},j,k} + \beta_d \bar{u}^{n+\frac{1}{3}}_{i+\frac{1}{2},j,k} + \gamma_d \bar{u}^{n+\frac{1}{3}}_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\tau} - \frac{\alpha_d \bar{u}^*_{i+\frac{3}{2},j,k} + \beta_d \bar{u}^*_{i+\frac{1}{2},j,k} + \gamma_d \bar{u}^*_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\tau} = \\ & = \left(\frac{1}{2} \Lambda_{1d} \bar{u}^{n+\frac{1}{3}}_{1i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{1}{2} \Lambda_{1d} \bar{u}^n_{1i+\frac{1}{2},j,k} \right) \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Разностное решение (18) эффективно вычисляется с помощью трехточечной прогонки. Для второго и третьего этапа процедура повторяется. Другие компоненты скорости находятся по этой же схеме.

Таким образом, получаем компактную аппроксимацию для конвективного члена третьего, а для диффузионного члена четвертого порядка точности.

На втором этапе решается уравнение Пуассона, полученное из уравнения неразрывности с учетом поля скоростей первого этапа. Для решения трехмерного уравнения Пуассона разработан оригинальный алгоритм решения – спектральное преобразование в комбинации с матричной прогонкой [4]. Полученное поле давления на третьем этапе используется для пересчета окончательного поля скоростей.

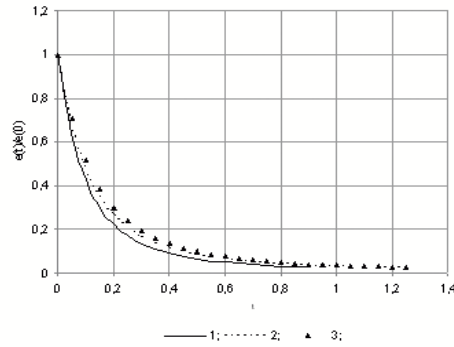


Рис. 1. Изменение турбулентной кинетической энергии по времени, рассчитанного при различных числах Рейнольдса: 1 – $Re=5000$; 2 – $Re=10000$; 3 – $Re=20000$.

Результаты моделирования

Приведенные на рисунке 1 результаты иллюстрируют влияние вязкости на вырождения кинетической энергии изотропной турбулентности, рассчитанного при различных числах Рейнольдса: 1 – $Re=5000$; 2 – $Re=10000$; 3 – $Re=20000$. Коэффициенты корреляции выражают среднее, по объему, корреляционное соотношение между компонентами скоростей в различных точках. Они необходимы для проверки состояния турбулентности. Чем дальше находятся точки между разными компонентами скоростей, тем меньше должны быть коэффициенты корреляции, т.е. они должны быть близки к нулю [5 – 6]. На рисунке 2а показано изменение продольной корреляционной функции $f(r)$ по времени, рассчитанного при $Re=20000$. Видно, что с ростом r они устремляются к нулю. Также на рисунке 2б показано изменение поперечной корреляционной функции $g(r) = g_1(r) = g_2(r)$. А из рисунков 2а-2б видно выполнение следующего условия изотропной турбулентности:

$$g(r) = \frac{1}{2}r \frac{df}{dr} + f(r) .$$

На рисунке 3 представлена компонента скорости u в физическом пространстве при $t = 0$ и $t = 0,6$.

2. Заключение

Для решения уравнения Навье-Стокса был построен численный алгоритм на основе компактных разностных схем третьего порядка точности, позволяющий решать задачи турбулентных течений при больших числах Рейнольдса.

Построенный численный алгоритм позволяет достаточно точно рассчитывать изменение характеристики изотропной турбулентности по времени, при большом числе Рейнольдса. Повышение точности расчетов достигалось применением компактных схем повышенного порядка точности.

В процессе моделирования получены изменения кинетической энергий турбулентности по времени, изменение продольно-поперечных корреляционных функций.

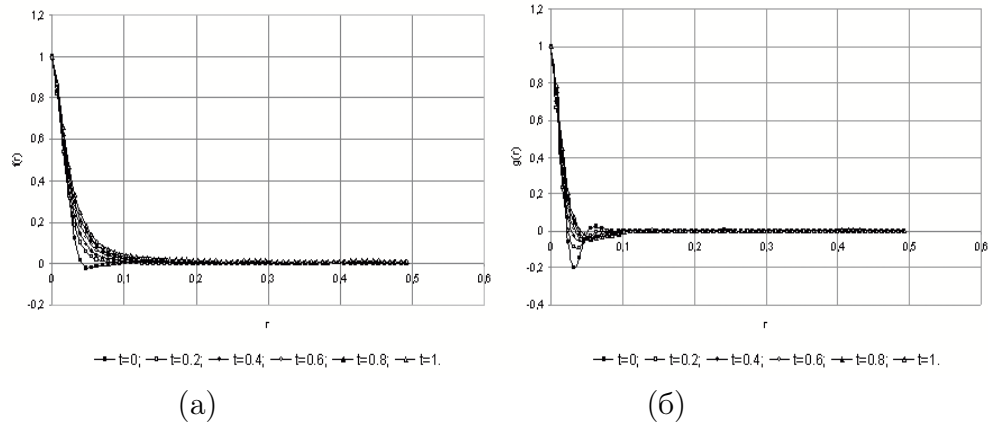


Рис. 2. Изменение корреляционной функции по времени, при $Re=20000$: (а) $-f(r)$, (б) $-g(r)$.

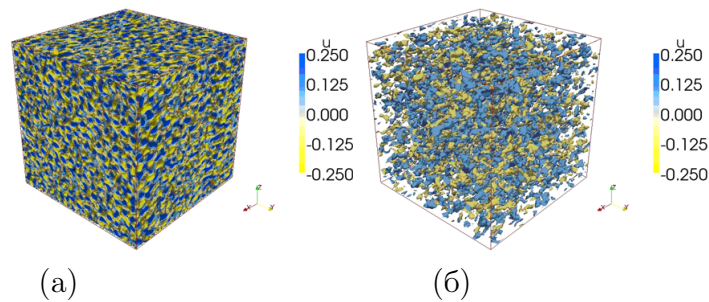


Рис. 3. Компонента скорости u в различные моменты времени: (а) $t = 0$; (б) $t = 0,6$.

Таким образом, анализируя результаты моделирования можно сделать следующее заключение, что построенная модель описывает процесс вырождения изотропной турбулентности в заключительный период. Найденные турбулентные характеристики соответствуют известным экспериментальным данным [5 -6]. При этом полученное на основе численного решения уравнения Навье-Стокса физические характеристики турбулентных вихрей переведенные в фазовое пространство отвечает закону Колмогорова.

Список литературы

- [1] FERZIGER J.H. Large eddy simulation of turbulent flows // AIAA J. 1977. Vol. 15, № 9. P. 1261-1267.
- [2] ТОЛСТЫХ А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990. – 230 с.
- [3] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
- [4] АБДИБЕКОВ У.С., ЖУМАГУЛОВ Б.Т., СУРАПБЕРГЕНОВ Б.Д. Численное моделирование турбулентных течений методом крупных вихрей // Вычисл. технологии. 2007. Т.12, специальный выпуск 4. С. 4-9.
- [5] MONIN, A.C., YAGLOM, A.M. Statistical Hydromechanics, Part 2. // Moscow: Nauka, 1967. 720 pp.
- [6] ORSZAG, S.A., PATTERSON, G.S. Numerical Simulation of Three-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence. // Physical Review Letters. 1972. Vol. 28. P. 76-79.