

О сходимости разностных схем сквозного счета

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск

В настоящее время широкое распространение получили разностные схемы повышенной точности типа TVD для сквозного расчета разрывных решений гиперболических систем дифференциальных уравнений [1, 2] (систем законов сохранения [3]), в частности систем дифференциальных уравнений газовой динамики и гидравлики. Однако в большинстве работ, посвященных построению таких схем (см. например [4-7]), под точностью схемы понимается порядок ее тейлоровского разложения на гладких решениях, что не гарантирует аналогичного повышения точности при расчете разрывных решений. Несмотря на это, долгое время существовало ошибочное мнение о том, что указанные схемы сохраняют повышенный порядок сходимости во всех гладких частях рассчитываемых обобщенных решений. Способствовало распространению этого ошибочного мнения то, что в подавляющем числе работ тестирование разностных схем в основном проводится на различных вариантах задачи о распаде разрыва, точное решение которой представляет собой набор простых волн (стационарных ударных волн и центрированных волн разрежения), соединенных областями постоянных течений. Такое тестирование позволяет эффективно оценить разрешимость схемой сильных и слабых разрывов, а также наличие или отсутствие осцилляций на фронтах ударных волн. Однако оно не может дать никакой информации о реальной точности схемы в областях влияния ударных волн, поскольку точное решение за их фронтами является постоянным. Кроме того, эту точность нельзя оценить при расчете нестационарных ударных волн, возникающих при решении скалярного закона сохранения, поскольку в этом случае область влияния устойчивой ударной волны совпадает с линией ее фронта.

Для определения точности схемы в областях влияния ударных волн необходимо рассчитывать разрывные решения квазилинейных систем законов сохранения с нестационарными ударными волнами, т.е. ударными волнами, которые распространяются с переменной скоростью и за фронтами которых формируется непостоянное решение. Такое решение для систем законов сохранения, как правило, не описывается точными формулами и для определения скорости сходимости к нему разностного решения необходимо проведение серии из (как минимум) трех расчетов на последовательности сжимающихся сеток, что позволяет использовать метод Рунге для приближенного определения порядка сходимости. В работах [8-10] указанным способом было показано, что схемы типа TVD имеют не более чем первый порядок локальной сходимости в областях влияния нестационарных ударных волн и тем самым по существу схемами повышенной точности не

являются. Такое снижение порядков сходимости свидетельствует о том, что в TVD схемах происходит потеря точности при передаче условий Гюгонио через размазанные фронты ударных волн. Однако свидетельствует опосредовано.

Для непосредственной оценки точности передачи схемой условий Гюгонио необходимо исследовать сходимость интегралов от разностного решения по областям, содержащим фронт ударной волны. Причем эти интегралы должны допускать потенциальную возможность получения повышенного (как минимум, второго) порядка сходимости для схем сквозного счета, в силу чего такая сходимость не может быть сильной, например, в нормах L_1 или L_2 . Связано это с тем, что в схемах сквозного счета в нескольких узлах в окрестности фронта ударной волны отсутствует локальная сходимость разностного решения к точному, и поэтому порядок сходимости разностного решения в сильной норме, содержащей линию разрыва, в принципе не может быть выше первого.

В настоящей работе точность передачи схемой условий Гюгонио через фронт ударной волны оценивается путем определения порядка сходимости интеграла от разностного решения, а не от его модуля, как в норме L_1 . Основная идея данного подхода, принадлежащая С. К. Годунову и В. С. Рябенькому и впервые реализованная в работе [11], заключается в том, что при такой сходимости ошибка, возникающая перед фронтом ударной волны за счет его размазывания, может быть компенсирована аналогичной ошибкой противоположного знака за фронтом волны. Приводимые далее примеры показывают, что (в отличие от TVD схемы [6]) в ряде немонотонных схем повышенного порядка на гладких решениях [12, 13] этот подход позволяет получить второй порядок интегральной сходимости через фронт нестационарной ударной волны.

В качестве конкретной гиперболической системы выберем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды [1, 2], дивергентная форма записи которой в случае прямоугольного горизонтального русла без учета донного трения имеет вид

$$H_t + q_x = 0, \quad q_t + (q^2 / H + gH^2 / 2)_x = 0, \quad (1)$$

где $H(t, x)$ и $q(x, t)$ – глубина и расход жидкости, g – ускорение свободного падения. Рассмотрим для системы (1) в области $x, t \geq 0$ следующую начально-краевую задачу, предложенную в [8],

$$H(0, x) = 2 - \frac{2}{\pi} \arctg(x), \quad q(0, x) = 0, \quad q(t, 0) = \alpha t, \quad \alpha = \frac{4g}{\pi}. \quad (2)$$

Такое значение коэффициента α обеспечивает непрерывность точного решения и его первых производных в угловой точке $(0, 0)$. При решении задачи (2) в момент времени $t \approx 1$ в результате градиентной катастрофы формируется прерывная волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x с возрастающей амплитудой и скоростью (рис. 1а-3а). Расчеты проводились до момента времени $t \approx 2$, при котором точное решение остается

докритическим, что гарантирует корректность постановки граничного условия.

На рис. 1–3 приведены результаты расчета задачи (1), (2) по трем разностным схемам: TVD схеме Хартена [6], схеме МакКормака [12] и схеме Русанова [13]. Эти схемы относятся к классу явных двухслойных по времени и симметричных по пространству консервативных разностных схем. Схема Хартена [6] обладает TVD свойством в скалярном случае, является монотонной (при аппроксимации линейных систем), пятиточечной по пространству и имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Схема МакКормака [12] является немонотонной, трехточечной по пространству и имеет второй порядок аппроксимации на гладких решениях. Схема Русанова [13] является немонотонной, пятиточечной по пространству и имеет третий порядок аппроксимации на гладких решениях.

Разностные начальные и граничные условия задаются путем точной аппроксимации условий (2). Граничные значения глубины H_0^n определяются в результате решения разностного уравнения

$$\frac{H_0^{n+1} - H_0^n}{\tau} + \frac{q_1^n - q_0^n}{h} = 0,$$

где τ и h – шаги схемы по времени и по пространству. В TVD схеме и схеме Русанова, которые являются пятиточечными по пространству, глубины и расходы в приграничном узле $j = 1$ вычисляются по схеме МакКормака.

На рис. 1а–3а на два момента времени $t = 1, 2$ приведены профили глубины H . Кружками показаны результаты расчета по всем трем схемам на сетке с шагом $h = 0.2$, а сплошной линией, моделирующей точное решение, изображены результаты расчета по TVD схеме на сетке с шагом $h = 0.00625$. Из этого рисунка видно, что в отличие от TVD схемы, схемы МакКормака и Русанова при $t = 2$ имеют заметные осцилляции в окрестности фронта сформировавшейся ударной волны. На рис. 1б–3б приведены порядки слабой интегральной сходимости, вычисленные по методу, изложенному в работе [11], а на рис. 3 – погрешности вычисления инварианта $w = q/H - \sqrt{gH}$, переносимого в область влияния ударной волны вдоль характеристик, выходящих с ее фронта (эти погрешности вычисляются также как в [8]). Точностью вычисления этого инварианта определяется точность разностной схемы в области влияния ударной волны. На рисунках крестиком на оси x показана точка градиентной катастрофы, а треугольником – положение фронта прерывной волны в момент времени $t = 2$. Результаты расчетов, представленные на этих рисунках, выполнялись по методу Рунге на базисной сетке с пространственным шагом $h = 0.00625$. Показаны они для каждого 32-го узла этой сетки.

Из рис. 1 следует, что схема Хартена имеет первый порядок интегральной сходимости на отрезках, правая граница которых расположена перед ударной волной, а левая граница – за ударной волной, в области ее влияния. Схемы МакКормака и Русанова (рис. 2, 3) сохраняют на этих от-

резках второй порядок интегральной сходимости. Это означает, что немонотонные схемы МакКормака и Русанова с более высокой точностью, чем TVD схема Хартена, передают условия Гюгонио через фронт нестационарной ударной волны и, как следствие, с существенно более высокой точностью вычисляют инвариант w в области ее влияния (рис. 4).

Объяснение этого, на первый взгляд, парадоксального результата следует из того, что в данных немонотонных схемах функции численных потоков являются достаточно гладкими, в то время как в TVD схемах они, в результате применения различных минимаксных процедур, оказываются лишь Липшиц непрерывны. Поэтому, согласно теореме из работы [14], немонотонные схемы из [12, 13] сохраняют повышенный порядок аппроксимации ε -условий Гюгонио на нестационарных ударных волнах, в то время как в TVD схемах этот порядок снижается до первого, независимо от их точности на гладких решениях.

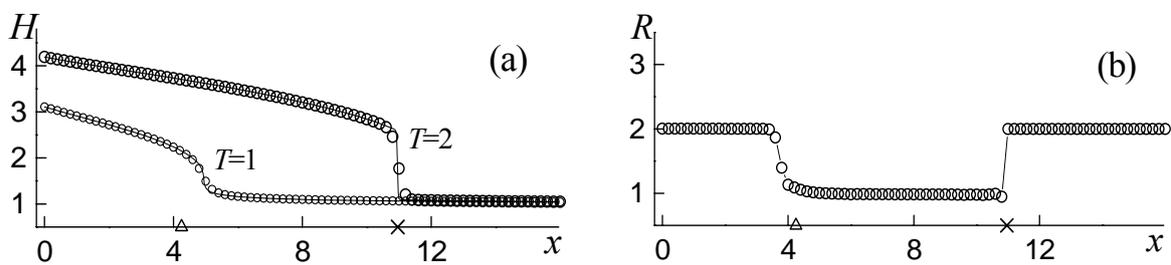


Рис. 1. Расчет нестационарной ударной волны по TVD схеме Хартена.

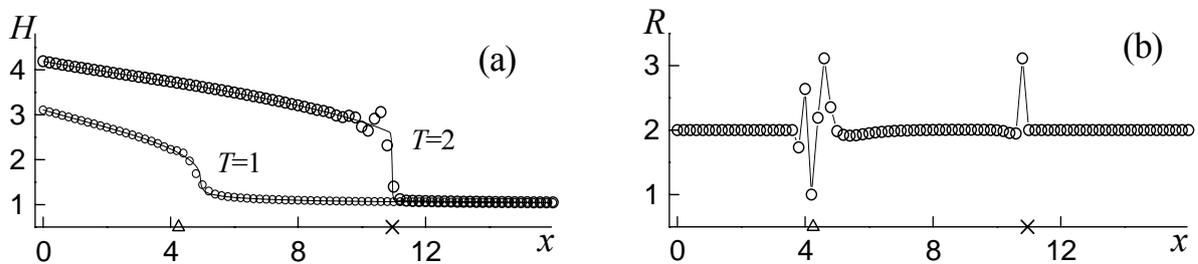


Рис. 2. Расчет нестационарной ударной волны по схеме МакКормака.

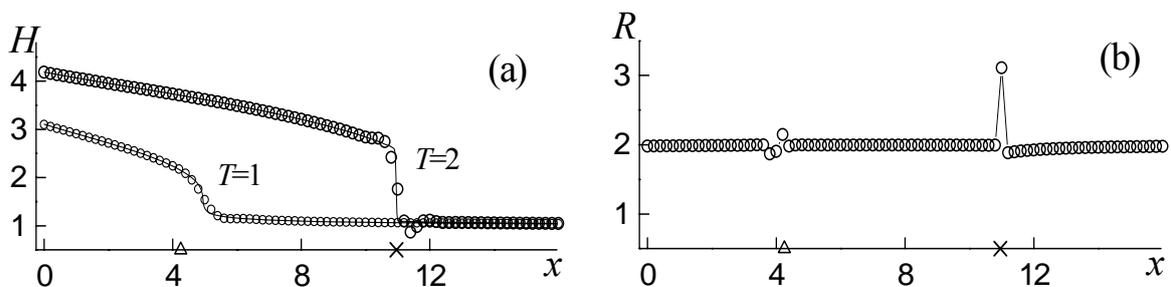


Рис. 3. Расчет нестационарной ударной волны по схеме Русанова.

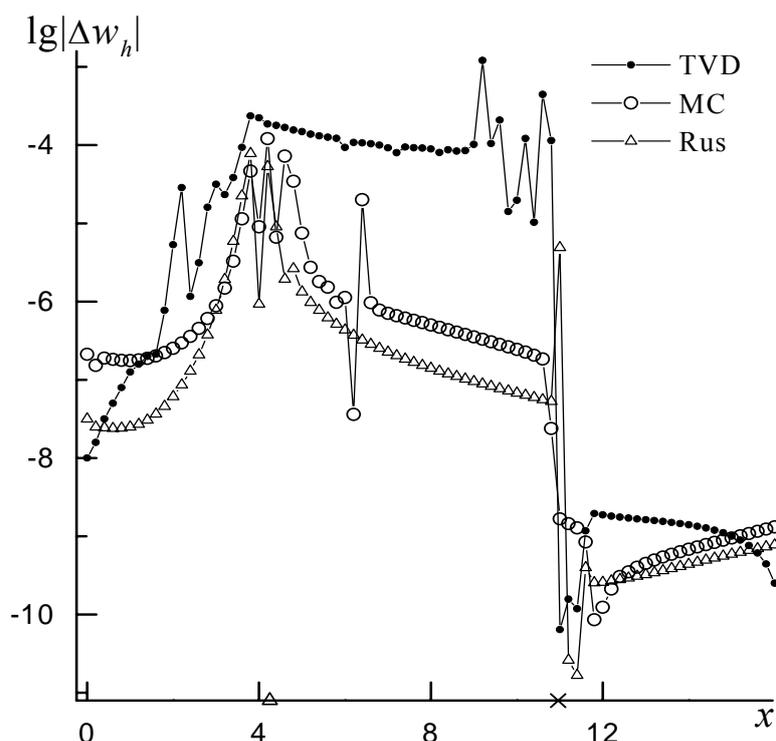


Рис. 4. Точность вычисления инварианта w по TVD схеме, схеме МакКор-мака (MC) и схеме Русанова (Rus).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-01-00569, 09-01-98001 и 10-01-00338) и проектов фундаментальных исследований Президиума РАН № 4.7 и Президиума СО РАН № 23.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1972.
4. Колган В.П. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 18. № 5. С. 1340-1345.
5. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comp. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101-136.
6. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. V. 49. P. 357-393.

7. Пинчуков В.П., Шу Ч.-В. Численные методы высоких порядков для задач аэрогидродинамики. -- Изд-во СО РАН, Новосибирск. 2000.
8. Остапенко В.В. О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1201-1212.
9. Casper J., Carpenter M.H. Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // SIAM J. Sci. Comput. 1998. V. 19. № 1. P. 813-828.
10. Engquist B., Sjögreen B. The convergence rate of finite difference schemes in the presence of shocks // SIAM J. Numer. Anal. 1998. V. 35. P. 2464-2485.
11. Остапенко В.В. О слабой сходимости на разрывных решениях TVD схемы Хартена второго порядка аппроксимации // Вычислит. технологии. 1997. Т. 2. № 5. С. 57-65.
12. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Paper 69-354. 1969.
13. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счёта разрывных решений // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303-1305.
14. Остапенко В.В. О конечно-разностной аппроксимации условий Гюгонио на фронте ударной волны, распространяющейся с переменной скоростью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 8. С. 1355-1367.