

О производных функций газодинамических параметров за поверхностью сильного разрыва

Е.С. ПРОХОРОВ

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
e-mail: prokh@hydro.nsc.ru

Use of a natural assumption on the form of the caloric equation of state (internal energy) of the medium for planar, cylindrically and spherically symmetric motion made it possible to obtain the relations that give a one-to-one correspondence between the first partial spatial derivatives (gradients) of the pressure, density, mass velocity of gas behind the shock or detonation front (surface of strong discontinuity) and the time derivative of velocity (acceleration) of the front. The assumption is based on the fact that, taking into account the thermal equation of state, the total internal energy, including both the thermodynamic part and potential chemical energy, can be represented as a function of pressure and density. This holds for both inert media and reaction products in the state of chemical equilibrium.

В газовой динамике под сильным разрывом понимают двумерную поверхность в пространстве, на которой функции плотности ρ , массовой скорости u , давления p и других параметров сплошной среды имеют разрыв первого рода. Величины разрывов этих функций не могут быть произвольными, а удовлетворяют некоторым соотношениям — уравнениям сильного разрыва [1]. Так для сильного разрыва типа «ударная волна» эти уравнения могут быть представлены в следующем виде

$$\begin{aligned} \rho_*(D - u_*) &= \rho_0(D - u_0), \\ p_* + \rho_*(D - u_*)^2 &= p_0 + \rho_0(D - u_0)^2, \\ U(p_*, \rho_*) + p_*/\rho_* + (D - u_*)^2/2 &= U_0 + p_0/\rho_0 + (D - u_0)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Они выражают законы сохранения массы, импульса и энергии на ударном фронте (поверхности разрыва). Здесь D — скорость фронта, U — удельная (на единицу массы) внутренняя энергия среды; индексами 0 и * обозначаются значения газодинамических величин перед фронтом (в исходном состоянии) и непосредственно за фронтом волны соответственно. Отметим, что с учетом теплового эффекта за счет химических реакций эти законы сохранения применимы и для детонационного фронта (сильного разрыва с тепловыделением) [2, 3].

Если движение среды за фронтом описывается гладким одномерным решением, а параметры перед фронтом постоянны, то можно установить однозначное соответствие между частной пространственной производной (ЧПП) функции любого газодинамического параметра — $(\partial \mathbf{y} / \partial r)_*$, где $\mathbf{y} = \{\rho, u, p\}$, и производной по времени скорости (ускорением) фронта — dD/dt . Для одномерного адиабатического течения совершенного газа такие ЧПП за фронтом ударной волны приведены в [4], где в дальнейшем они использованы для построения теории затухания ударных волн. Здесь уместно также отметить близкую по тематике работу [5], где получены ЧПП газодинамических функций за искривленной стационарной ударной волной, на которую набегают равномерный сверхзвуковой поток. Однако в этой работе не учитывалось влияние ускорения фронта на ЧПП.

Область применимости формул для ЧПП, представленных в [4], в значительной мере ограничена условиями модели совершенного газа [6], в рамках которой полагают, что газ является идеальным, химически инертным и имеет постоянный показатель адиабаты — $\gamma = (\partial \ln p / \partial \ln \rho)_S = const$, где S — энтропия вещества. Например, полученные ранее формулы не могут быть использованы для таких важных в практическом отношении случаев как: 1) движения газа за сильными ударными волнами, когда возможны нарушение условий его идеальности, возбуждение дополнительных степеней свободы и диссоциация молекул; 2) равновесные течения реагирующих газов за фронтом детонации, распространяющейся в химически активной среде.

В настоящей работе удалось снять эти ограничения путем использования естественного предположения к форме записи внутренней энергии U . Предположение основано на том, что с учетом термического уравнения состояния (например: уравнения Клапейрона – Менделеева или уравнения Ван-дер-Ваальса) полную внутреннюю энергию $U = U_{th} + U_{ch}$, включающую в себя кроме термодинамической части U_{th} и потенциальную химическую энергию U_{ch} , можно представить в виде функции давления и плотности — $U = U(p, \rho)$. Это имеет место, как для инертных сред, так и для продуктов реакции в состоянии химического равновесия (см. например, [7]). В частности, для совершенного газа имеем $U = 1/(\gamma - 1) \cdot p/\rho + const$. При такой форме записи внутренней энергии, с учетом первого начала термодинамики, равновесная скорость звука c в среде определяется из уравнения

$$c^2 = (\partial p / \partial \rho)_S = (p/\rho^2 - U_\rho)/U_p, U_p = (\partial U / \partial p)_\rho, U_\rho = (\partial U / \partial \rho)_p. \quad (2)$$

При выводе искомых соотношений для ЧПП будем использовать следующие дополнительные предположения. Пусть в одномерном приближении ударная или детонационная волна с мгновенной химической реакцией за фронтом движется по сплошной (в общем случае химически активной) среде с заданными газодинамическими параметрами. Условие о мгновенности химической реакции означает, что за фронтом реализуется равновесное течение продуктов реакции. Полагаем, что $U = U(p, \rho)$ известная, в общем виде неявная функция. Отметим, что при детонации из-за необратимости химической реакции $U_0 \neq U(p_0, \rho_0)$.

Дифференцируя (1) по D , с учетом (2) получим систему алгебраических уравнений относительно производных dy_*/dD , где $y_* = \{\rho_*, u_*, p_*\}$. Решая эту систему находим:

$$\frac{d\rho_*}{dD} = \frac{\rho_* - \rho_0}{D - u_0} \cdot \frac{\rho_*}{\rho_0} A, \quad \frac{du_*}{dD} = \frac{u_* - u_0}{D - u_0} (A + 1), \quad \frac{dp_*}{dD} = \frac{p_* - p_0}{D - u_0} (A + 2), \quad (3)$$

$$A = \frac{2 + (1/\rho_* - 1/\rho_0)/(U_p)_*}{(1/M_*)^2 - 1},$$

где $M_* = (D - u_*)/c_*$ — число Маха относительного потока за фронтом волны. Соотношения (3) можно записать и в более компактной форме:

$$\frac{d \ln(\rho_* - \rho_0)}{d \ln M_0} = \frac{\rho_*}{\rho_0} \cdot A, \quad \frac{d \ln(u_* - u_0)}{d \ln M_0} = A + 1, \quad \frac{d \ln(p_* - p_0)}{d \ln M_0} = A + 2,$$

где $M_0 = (D - u_0)/c_0$ — число Маха относительного потока перед фронтом.

В работах показано [1, 3], что если сплошная среда обладает «нормальными» [8] термодинамическими свойствами, то для ударных и детонационных волн выполняются естественные неравенства:

$$p_* > p_0, \quad \rho_* > \rho_0, \quad u_* > u_0, \quad M_0 > 1, \quad M_* < 1. \quad (4)$$

Из общих соображений также следует, что безразмерная величина A в формулах (3) всегда положительна ($A > 0$), поскольку только в этом случае плотность ρ_* будет возрастать с увеличением скорости фронта ($d\rho_*/dD > 0$). В частности, для совершенного газа $A = 2/(M_0^2 - 1)$.

Далее при выводе соотношений для ЧПП воспользуемся методом, описанным в [4]. Так для одномерных движений любой газодинамический параметр среды зависит только от одной пространственной координаты r ($r \geq 0$) и времени t , т.е. $\mathbf{y} = \mathbf{y}(r, t)$. Если определять текущую координату фронта волны r_* в виде монотонно возрастающей функции от времени (волна распространяется от центра) — $r_* = r_*(t)$, тогда для фронтовых параметров $\mathbf{y}_* = \{\rho_*, u_*, p_*\}$ имеем следующие зависимости $\mathbf{y}_* = \mathbf{y}(r_*(t), t) = \mathbf{y}_*(t)$. Причем полные производные параметров по времени связаны с первыми частными производными аналогичных параметров за фронтом по t — $(\partial\mathbf{y}/\partial t)_*$ и координате r — $(\partial\mathbf{y}/\partial r)_*$ следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{y}_*}{dt} = \frac{d\mathbf{y}_*}{dD} \cdot \frac{dD}{dt} = \left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t}\right)_* + D \left(\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial r}\right)_*. \quad (5)$$

Здесь учтено, что скорость фронта — $D = dr_*/dt$.

Одномерные уравнения нестационарной газовой динамики для адиабатических плоских движений ($N = 0$), а также движений с осевой ($N = 1$) и центральной ($N = 2$) симметрией могут быть приведены к виду [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} &= -m, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= -i, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial r} - c^2 \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial r} \right) &= -e, \end{aligned} \quad (6)$$

где $m = \rho u N / r$, $i = 0$, $e = 0$.

Поскольку эти уравнения справедливы и для течения газа, примыкающего к фронту волны, то исключая в (6) с помощью (5) частные производные $(\partial\mathbf{y}/\partial t)_*$, получим систему линейных уравнений относительно $(\partial\mathbf{y}/\partial r)_*$. Решая эту систему с учетом (3), найдем искомые ЧПП функций газодинамических параметров за фронтом волны (поверхностью сильного разрыва):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)_* &= \frac{1}{M_*^2 - 1} \left\{ [3(A + 1) - A/M_*^2] \frac{\rho_* - \rho_0}{c_*^2} \cdot \frac{dD}{dt} + \frac{M_* m_*}{c_*} + \frac{\rho_* i_*}{c_*^2} + \frac{e_*}{M_* c_*^3} \right\}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_* &= \frac{1}{M_*^2 - 1} \left\{ \frac{\rho_0}{\rho_*} (2A + 3) \frac{u_* - u_0}{c_*^2} \cdot \frac{dD}{dt} + \frac{m_*}{\rho_*} + \frac{M_* i_*}{c_*} + \frac{e_*}{\rho_* c_*^2} \right\}, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_* &= \frac{1}{M_*^2 - 1} \left\{ \frac{\rho_0}{\rho_*} [A + 2 + (A + 1)/M_*^2] \frac{p_* - p_0}{c_*^2} \cdot \frac{dD}{dt} + M_* c_* m_* + \rho_* i_* + \frac{M_* e_*}{c_*} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $m_* = \rho_* u_* N / r_*$, $i_* = 0$, $e_* = 0$. По-видимому (7) является наиболее компактной формой записи для $(\partial\mathbf{y}/\partial r)_*$. При попытке преобразовать их с помощью уравнений (1), они становятся более громоздкими и теряют наглядность. Косвенным подтверждением правильности вывода этих соотношений может служить следующее. Так при подстановке

в (7) известных формул, соответствующих уравнениям (1) в совершенном газе [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_*}{\rho_0} &= \frac{D - u_0}{D - u_*} = \frac{(\gamma + 1)M_0^2}{(\gamma - 1)M_0^2 + 2}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}M_0^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \\ M_*^2 &= \frac{2 + (\gamma - 1)M_0^2}{2\gamma M_0^2 - (\gamma - 1)}, \quad c_*^2 = \gamma \frac{p_*}{\rho_*}, \quad c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

эти соотношения сводятся к уравнениям, ранее полученным в [4] для случая, когда газ перед фронтом ударной волны покоится ($u_0 = 0$).

Наиболее просто соотношения для ЧПП выглядят при изотермических движениях газа ($p/\rho = const$). Для этого достаточно в формулах (8) положить $\gamma = 1$. Тогда из (3) находим:

$$d\rho_*/dD = 2\rho_0 M_0/c_0, \quad dp_*/dD = 2\rho_0 c_0 M_0, \quad du_*/dD = 1 + 1/M_0^2, \quad (9)$$

и соответственно из (7) с учетом, что $dD/dt = c_0 dM_0/dt$, получаем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)_* &= \frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_* = -\frac{\rho_0}{c_0} \cdot \frac{M_0^2(M_0^2 + 3)}{M_0^2 - 1} \cdot \frac{dM_0}{dt} - \rho_0 M_0^2 \left(1 + \frac{M_0}{M_0^2 - 1} \cdot \frac{u_0}{c_0}\right) \frac{N}{r_*}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_* &= -\frac{3M_0^2 + 1}{M_0(M_0^2 - 1)} \cdot \frac{dM_0}{dt} - c_0 M_0 \left(1 + \frac{M_0}{M_0^2 - 1} \cdot \frac{u_0}{c_0}\right) \frac{N}{r_*}. \end{aligned} \quad (10)$$

Обращает на себя внимание, что в (10) производные $(\partial \mathbf{y}/\partial r)_*$ явно выражаются через M_0 и при $N = 0$ эти формулы еще более упрощаются.

Соотношения (7) могут быть обобщены и на другие виды движений среды. Так в случае квазиодномерных течений газа в трубе с переменной площадью поперечного сечения $\sigma = \sigma(r)$ достаточно заменить в выражении для m системы (6), а значит и в решении (7), отношение N/r на производную $d(\ln \sigma)/dr$. Заметим, что в канальном приближении принципиально нетрудно учесть также потери на трение и теплоотвод в стенки трубы [10]. В этом случае правые части i и e уравнений системы (6) уже не равны нулю, а являются некоторыми функциями, зависящими от параметров потока ρ, u, p и гидравлического диаметра канала, который для круглой трубы совпадает с обычным. Однако эти изменения не влияют на характерную структуру соотношений (7).

Как показывает анализ, во всех рассмотренных случаях эти соотношения представляют формулы типа $(\partial \mathbf{y}/\partial r)_* = \mathbf{g}_* \cdot dD/dt + \mathbf{h}_*$, которые устанавливают линейную связь между первыми ЧПП параметров за фронтом волны $(\partial \mathbf{y}/\partial r)_*$ и ускорением самого фронта dD/dt . В общем виде коэффициенты пропорциональности \mathbf{g}_* легко получить из (7). Они обладают универсальностью и не зависят от внешних условий движения среды (от вида выражений для m, i, e). При заданных начальных параметрах ρ_0, u_0, p_0, U_0 конкретные значения коэффициентов определяются функциональной зависимостью для внутренней энергии $U = U(p, \rho)$ и скоростью фронта D . Для большинства практически важных случаев, когда справедливы неравенства (4), можно показать, что коэффициенты пропорциональности, стоящие перед производной dD/dt отрицательны. Тогда из (7), в частности, следует, что для адиабатических плоских, цилиндрически и сферически симметричных видов движения при ускорении фронта волны ($dD/dt > 0$) плотность, давление и массовая скорость газа уменьшаются при приближении к фронту, т.е. $(\partial \mathbf{y}/\partial r)_* < 0$.

Соотношения (7) можно использовать при построении численных и аналитических приближенных решений газодинамических задач. Они могут найти применение в инженерных расчетах для оценки значений производных $(\partial \mathbf{y}/\partial r)_*$ по изменению скорости

фронта волны, фиксируемому в эксперименте. В заключение остановимся на одном примере, демонстрирующем возможность использования соотношений для ЧПП при исследовании аппроксимации численных разностных схем вблизи границы, соответствующей сильному разрыву.

При численном решении уравнений с частными производными приходится иметь дело не с функциями, а их сеточными аналогами. Поэтому в начале, используя полученные соотношения для производных dy_*/dD и $(\partial y/\partial r)_*$, построим приближенное аналитическое решение в сеточной области, имеющей, например, подвижную правую границу типа «ударной волны».

Сеточный шаблон, обладающий достаточной универсальностью для реализации различных разностных схем, представлен на рис. 1. Координаты точек (узлов) подвижной сетки «нижнего» временного слоя t_0 обозначаем через $r_{n-j/2}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), а координаты узлов «верхнего» временного слоя $t = t_0 + \tau$ (τ — шаг по времени) обозначаем через $r^{n-j/2}$. Для вычисления координат точек $\tilde{r}_{n-j/2}$ промежуточного слоя $t = t_0 + \tau/2$ применяется естественная формула $\tilde{r}_{n-j/2} = (r^{n-j/2} + r_{n-j/2})/2$. Для удобства последующего изложения полагаем шаг по координате постоянным, то есть $r_{n-j/2} - r_n = r^{n-j/2} - r_n = -jh/2$. Понятно, что для каждой конкретной схемы будут задействованы лишь некоторые узлы для перехода со слоя t_0 на слой $t = t_0 + \tau$.

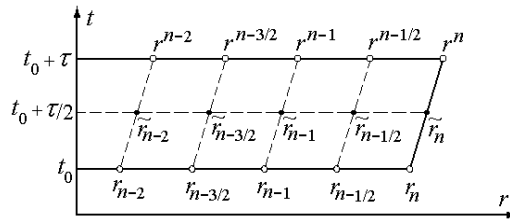


Рис. 1. Сеточный шаблон разностной схемы

Пусть правая граница - плоская ($N = 0$) ударная волна, распространяющаяся по неподвижному ($u_0 = 0$) изотермическому газу, для которого выполняются уравнения (9) и (10). Зададим при t_0 произвольно положение фронта волны r_* , его скорость $D = c_0 M_0$ (а следовательно, и фронтовые параметры y_*) и ускорение $dD/dt = c_0 dM_0/dt$. Полагаем, что на «нижнем» слое координата граничного узла $r_n = r_*$. Тогда используя соотношения для производных (9) и (10), можно построить сеточное решение для газодинамических функций вблизи границы на «нижнем» ($y_{n-j/2}$) и «верхнем» ($y^{n-j/2}$) слоях с точностью до членов второго порядка малости по τ и h :

$$y_{n-j/2} = y_* - \frac{jh}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)_* + o(h^2), \quad y^{n-j/2} = y_* + \frac{dy_*}{dD} \cdot \frac{dD}{dt} \tau - \left(\frac{jh}{2} + \Delta r \right) \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)_* + o(\tau^2 + h^2), \quad (11)$$

где $\Delta r = r_* + D\tau + (dD/dt)\tau^2/2 - r^n + o(\tau^3)$ — погрешность в расчете по разностной схеме координаты фронта на «верхнем» слое.

Предположим, что для численных расчетов течения газа используется схема Годунова [11]. Приведем для этой схемы разностные уравнения (которые аппроксимируют дифференциальные уравнения системы (6), записанные в дивергентной форме) с учетом движения узлов сетки (см. рис. 1) для перехода с «нижнего» на «верхний» слой:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\hat{\rho}^{k-j/2} - \rho_{k-j/2}) + \frac{1}{h} \{ [\tilde{\rho}_k (\tilde{u}_k - \tilde{D}_n)] - [\tilde{\rho}_{k-1} (\tilde{u}_{k-1} - \tilde{D}_n)] \} = 0, \quad (k = n, n-1, n-2, \dots) \\ \frac{1}{\tau} (\hat{\rho}^{k-j/2} \hat{u}^{k-j/2} - \rho_{k-j/2} u_{k-j/2}) + \frac{1}{h} \{ [\tilde{p}_k + \tilde{\rho}_k \tilde{u}_k (\tilde{u}_k - \tilde{D}_n)] - \\ - [\tilde{p}_{k-1} + \tilde{\rho}_{k-1} \tilde{u}_{k-1} (\tilde{u}_{k-1} - \tilde{D}_n)] \} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

где $\tilde{D} = (r^n - r_n)/\tau$ — скорость движения граничного узла. Для выбранной схемы решение разностных уравнений $\hat{y}^{k-1/2}$ (т.е. величины $\hat{\rho}^{k-1/2}$, $\hat{u}^{k-1/2}$ и $\hat{p}^{k-1/2} = c_0^2 \hat{\rho}^{k-1/2}$) определены только в узлах с полуцелым номером, а функции \tilde{y}^k на промежуточном слое — в узлах с целым номером. Значения \tilde{y}^k вычисляются через известные величины $Y_{k-1/2}$ и $Y_{k+1/2}$ с «нижнего» слоя при решении задачи о распаде разрыва.

Ограничиваясь точностью порядка $o(h)$ при решении задач о распаде разрыва, можно оценить погрешность решения $\hat{y}^{k-1/2}$ разностных уравнений (12) за один шаг по сравнению с аналитическим решением (11) на «верхнем» слое. Так для ближайшего ($k = n$) к границе узла имеем

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{n-1/2} - \rho^{n-1/2} &= -\rho_0(M_0 - 1) \frac{dM_0}{dt} \cdot \frac{\tau}{2} + o(\tau^2 + h^2), \\ \hat{u}^{n-1/2} - u^{n-1/2} &= -c_0 \frac{M_0 - 1}{M_0^2} \cdot \frac{dM_0}{dt} \cdot \frac{\tau}{2} + o(\tau^2 + h^2),\end{aligned}$$

т.е. погрешность за один шаг порядка $o(\tau)$. В тоже время аналогичная погрешность для внутренних ($k = n - 1, n - 2, \dots$) узлов составляет величину $o(\tau^2 + h^2)$. Таким образом, вблизи подвижной границы типа «ударной волны» наблюдается снижение порядка аппроксимации для рассмотренной разностной схемы.

Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [2] Зельдович Я.Б. Теория горения и детонации газов. Москва, Ленинград: Изд-во АН СССР, 1944.
- [3] Митрофанов В.В. Детонация гомогенных и гетерогенных систем. Новосибирск: Изд-во ИГиЛ СО РАН, 2003.
- [4] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1963.
- [5] Русанов В.В. Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. Москва, 1973. (Препр. АН СССР. Ин-т прикладной математики. № 18).
- [6] Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977.
- [7] Николаев Ю.А., Фомин П.А. О расчете равновесных течений химически реагирующих газов // Физика горения и взрыва. 1982. Т. 18, № 1. С. 66–72.
- [8] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
- [9] Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971.
- [10] Гинзбург И.П. Прикладная гидрогазодинамика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958.
- [11] Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках / Г.Б. Алалыкин, С.К. Годунов, И.Л. Киреева, Л.А. Плинер. М.: Наука, 1970.