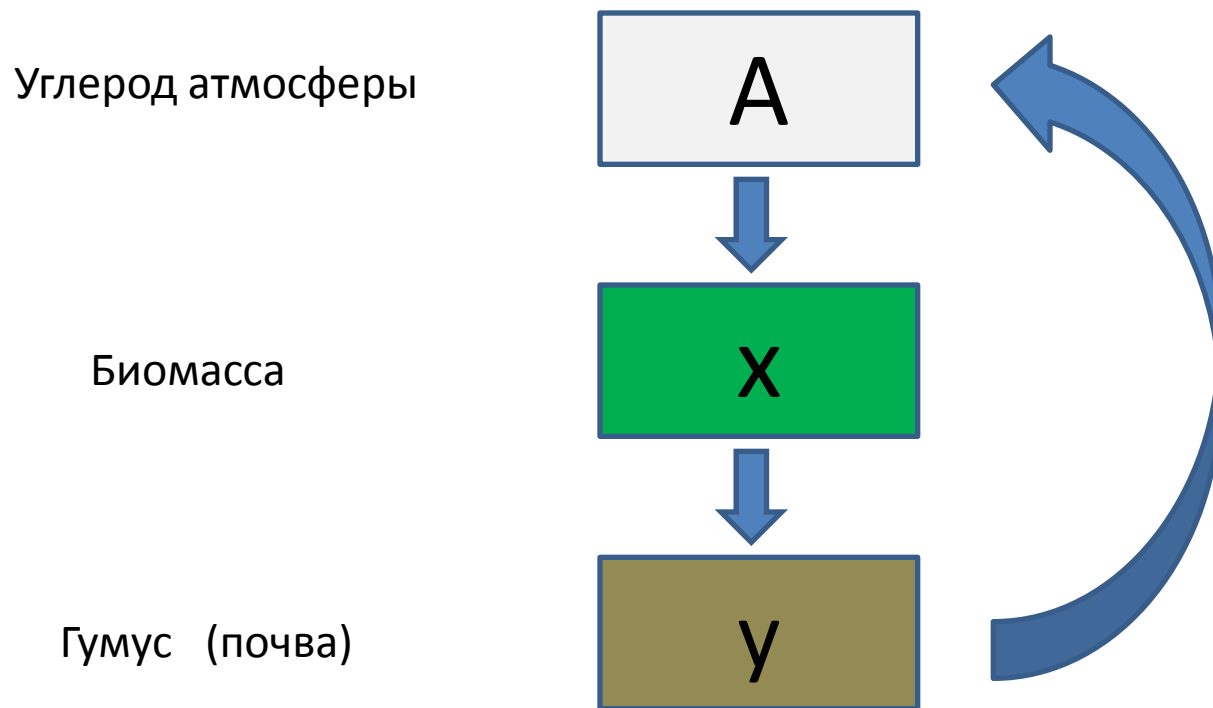


# Об устойчивости стационарных состояний минимальной модели многолетней динамики углерода в биосфере

А.М. Федотов,  
С.Б. Медведев, А.И. Пестунов

# Описание модели. Резервуары углерода



$$C = A + x + y$$

# Динамика биомассы

$$V_x \cdot x \cdot (x_{max} - x) \cdot V(A) \cdot f_{MaxGrowth}(T(A))$$

Прирост



Отмирание

$$V_d \cdot x$$

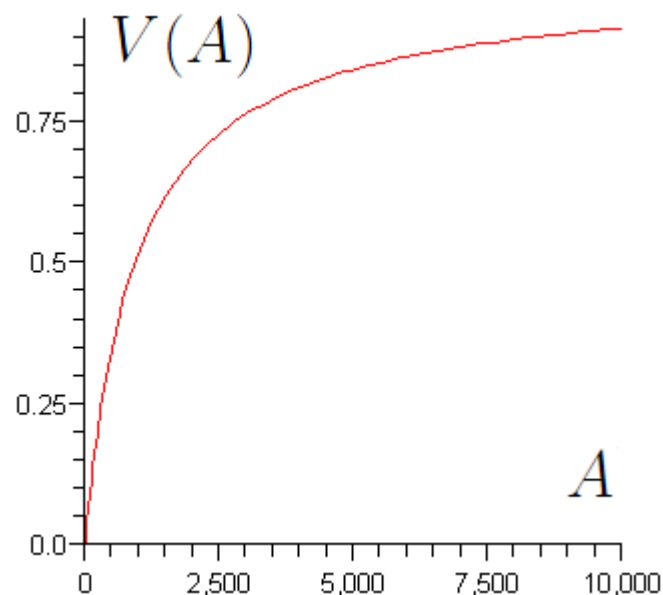
## Зависимость прироста биомассы растений от среднегодовой глобальной температуры

$$f_{MaxGrowth}(T) = T^d \cdot (T_{MaxGrowth} - T) \cdot \Theta(T) \cdot \Theta(T_{MaxGrowth} - T)$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

## Зависимость вида Моно увеличения прироста биомассы при увеличении углерода атмосферы

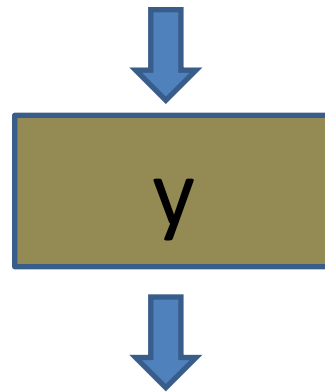
$$V(A) = \frac{V_{max} \cdot A}{V_0 + A}$$



# Динамика гумуса

$$V_d \cdot x$$

Прирост из-за отмирания биомассы



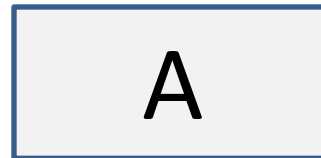
Почвенное дыхание

$$V_s \cdot y \cdot f_{MaxDecay}(T(A))$$

# Динамика углерода атмосферы

$$V_s \cdot y \cdot f_{MaxDecay}(T(A))$$

Почвенное дыхание



Прирост биомассы

$$V_x \cdot x \cdot (x_{max} - x) \cdot V(A) \cdot f_{MaxGrowth}(T(A))$$

# Глобальная минимальная модель.

С.И. Барцев, А.Г. Дегерменджи, Д.В. Ерохин

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = fuel(t) \\ \frac{dx}{dt} = V_x \cdot x \cdot (x_{max} - x) \cdot V(A) \cdot f_{MaxGrowth}(T(A)) - V_d \cdot x \\ \frac{dy}{dt} = V_d \cdot x - V_s \cdot y \cdot f_{MaxDecay}(T(A)) \\ C = A + x + y \end{cases}$$

Зависимость глобальной температуры от углерода атмосферы

$$T(A) = T_0 + T_{del} \cdot \log_2 \frac{A}{A_0}$$

# Данные о параметрах модели

Параметр	Min возможное значение	Max возможное значение	Значение 1958 года	Текущее значение
$A_0$	600	760	700	
$x_0$	500	850	810	
$y_0$	1080	2011	2011	
$V_x$				вычисляется из предположения
$x_{max}$	891	1296		
$V_d$				вычисляется из предположения
Степень d				1,5
Степень b				1,5
$T_{MaxGrowth}$	30	45		
$V_s$				вычисляется из предположения
$T_{MaxDecay}$	30	45		
$T_0$				15
$T_{del}$	2	6		
$V_{max}$				1
$V_0$				930
$P_0$	$55-\Delta$	$55+\Delta$		55



# Стационарные точки модели

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

$(A_0, 0, 0)$

Назовём точкой деградации биосферы, ввиду того, что значение биомассы и органических остатков равно нулю

$(A_0, x_0, y_0)$

Начальное положение 1958 года. Параметры модели определялись исходя из того, чтобы обеспечить стационарные (без антропогенной эмиссии углерода в атмосферу) скорости ЧПП, отмирания биомассы и почвенного дыхания равные 55 Гт в год в 1958 году.

$$V_x \cdot x_0 \cdot (x_{max} - x_0) \cdot V(A_0) \cdot f_{MaxGrowth}(T(A_0)) = V_d \cdot x_0 = V_s \cdot y_0 \cdot f_{MaxDecay}(T(A_0)) = P_0$$

# Исследование на устойчивость стационарных точек по линейному приближению

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = f(t, A, x, y) \\ \frac{dx}{dt} = h(A, x) \\ \frac{dy}{dt} = k(A, x, y) \end{cases} \quad L = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial A} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial A} & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial k}{\partial A} & \frac{\partial k}{\partial x} & \frac{\partial k}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ x \\ y \end{pmatrix} = L_{(A_s, x_s, y_s)} \cdot \begin{pmatrix} A \\ x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} fuel(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Переход к новым переменным

$$\begin{pmatrix} A \\ x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } T \text{ - матрица собственных векторов матрицы } L_{(A_s, x_s, y_s)}$$

$$\frac{dz}{dt} = T^{-1} \cdot L_{(A_s, x_s, y_s)} \cdot T \cdot z + T^{-1} \begin{pmatrix} fuel(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \Lambda \cdot z + T^{-1} \begin{pmatrix} fuel(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Lambda$  - диагональная матрица

# Неустойчивость стационарных состояний

$(A_0, 0, 0)$

Неустойчива при любых допустимых параметрах

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\frac{P_0}{y_0} < 0, \quad \lambda_3 = \frac{P_0}{x_{max} - x_0} > 0$$

$(A_0, x_0, y_0)$

$$\lambda_1 = 0$$

1. Комплексные с отрицательной действительной частью
2. Оба отрицательные действительные
3. Один отрицательный, другой положительный

# Выводы

Рассмотрены два стационарных состояния системы, при этом:

- Среди допустимых начальных данных выявлены различные качественные случаи поведения системы в окрестности стационарной точки
- Система без внешних воздействий не может попасть в точку деградации.
- В случае изъятия углерода из круговорота система может попасть в окрестность точки деградации, однако далее биомасса восстанавливается
- При определённых параметрах предположение о стационарности состояния системы до 1958 года невыполнимо из-за неустойчивости этого состояния. Система приходит в движение без антропогенных воздействий при малейшем возмущении.

Благодарю за внимание!