

К вопросу численного моделирования течения в расширяющемся канале*

В. В. ШАЙДУРОВ¹, Г. И. ЩЕПАНОВСКАЯ¹

¹*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*
e-mail: gi@icm.krasn.ru

Предложен алгоритм численного решения уравнений Навье-Стокса для двумерного движения вязкого теплопроводного газа. Дискретизация уравнений осуществляется комбинацией метода траекторий для субстанциональной производной и метода конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями для остальных слагаемых. Представлены результаты численного исследования структуры течения в плоском канале в зоне его расширения уступом для широкого диапазона чисел Маха и Рейнольдса. Исследованы поля скоростей и давления, изучена вихревая структура циркуляционного течения в области за уступом.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, вязкий теплопроводный газ, численное моделирование, метод траекторий, метод конечных элементов.

Введение

В настоящее время стало ясно, что при постановке задач расчета отрывных течений с вихревыми образованиями необходимо использовать не приближенные уравнения пограничного слоя, а полные уравнения Навье-Стокса. Численное решение уравнений Навье-Стокса и сегодня представляет большие трудности, что обусловлено нелинейностью исходных уравнений, наличием областей больших градиентов и других особенностей, возникающих при определённых параметрах и режимах газодинамических течений. Как следствие, это вызывает необходимость разработки и создания специальных численных методов решения этих уравнений. Хотя к настоящему времени разработано много численных алгоритмов и специальных комплексов программ (см. [1–5,10,11] и обширную цитируемую литературу в них), проблема создания и применения эффективных численных методов и алгоритмов остаётся актуальной.

Для аппроксимации полной (субстанциональной, или Лагранжевой) производной по времени в каждом уравнении системы используется метод траекторий, который заключается в аппроксимации этой производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль траектории движения частицы. Дискретизация по пространству остальных слагаемых уравнений Навье-Стокса на каждом временном слое осуществляется методом конечных элементов с кусочно-билинейными базисными функциями и применением простых квадратурных формул. Для решения систем алгебраических уравнений используется метод Якоби с улучшенным начальным приближением внутри внешних итераций по нелинейности.

Как следует из тестовых расчетов [6], модификация уравнений Навье-Стокса обеспечивает повышение точности приближенного решения по сравнению с погрешностью

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00224а) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН (проект № 18.2).

для немодифицированных уравнений. А применение комбинации методов траекторий и конечных элементов позволяет построить алгоритм, довольно эффективный с вычислительной точки зрения.

1. Постановка задачи и исходные уравнения

Рассмотрим двумерное ламинарное течение газа в плоском канале с расширением в виде уступа на нижней стенке канала при сверхзвуковой скорости потока на входе. Конфигурация расчетной области представлена на рис. 1. Начало введенной системы координат находится в левом нижнем углу в точке A . Ширина канала в левом входном сечении имеет размер h_1 , а в правом выходном сечении размер h_c . Высота уступа FE равна соответственно $b = h_c - h_1$, а длина уступа c . Левая и правая границы расчетной области A_1B и CD считаются достаточно удаленными от сечения C_1FE , поэтому на них можно принять условия, соответствующие невозмущенному течению.

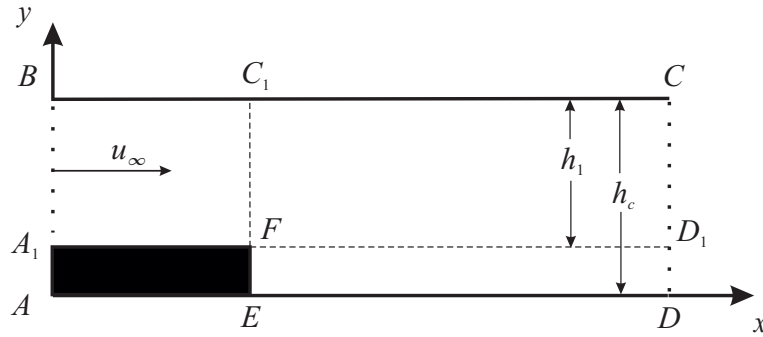


Рис. 1. Канал с уступом

Для описания движения газа используем нестационарные уравнения Навье-Стокса без упрощающих предположений. При введении безразмерных величин за масштаб длины принимается ширина канала CD ; за масштаб плотности принята плотность в набегающем потоке ρ_∞ , за масштаб скорости – скорость потока на входе в канал u_∞ , за масштаб времени – величина h_c/u_∞ , а за масштаб давления, температуры и внутренней энергии принимаются величины из условия совершенного газа.

Выпишем дифференциальные уравнения двумерного вязкого теплопроводного газа в виде безразмерных уравнений неразрывности, количества движения и уравнения для внутренней энергии

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{de}{dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \Phi. \quad (4)$$

Здесь $d(\cdot)/dt$ – субстанциональная, или полная производная, т.е.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (5)$$

ρ – плотность; u и v – проекции вектора скорости на оси x и y ; $P = (\gamma - 1)\rho e$ – давление; $\mu = (\gamma(\gamma - 1)M^2 e)^\omega$ – динамический коэффициент вязкости; e – внутренняя энергия. Компоненты тензора напряжений τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{xy} , проекции теплового потока q_x , q_y и диссипативная функция Φ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{2}{3\text{Re}}\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = \frac{2}{3\text{Re}}\mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ q_x &= -\frac{\gamma}{\text{Pr Re}}\mu \frac{\partial e}{\partial x}, \quad q_y = -\frac{\gamma}{\text{Pr Re}}\mu \frac{\partial e}{\partial y}, \\ \Phi &= \frac{\mu}{\text{Re}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля, $\gamma = 1.4$.

Для завершения постановки задачи зададим начальные и краевые условия. Пусть газ начинает движение слева направо из состояния покоя внутри области, так что $\rho(0, x, y) = 1$, $u(0, x, y) = 0$, $v(0, x, y) = 0$. Внутренняя энергия для совершенного газа равна $e(0, x, y) = (\gamma(\gamma - 1)M^2)^{-1}$. На входной границе A_1B на временном интервале $t \in (0, t_{fin})$ задаются следующие параметры потока: $\rho|_{A_1B} = 1$, $e|_{A_1B} = (\gamma(\gamma - 1)M^2)^{-1}$, $v|_{A_1B} = 0$. Пусть $b_1 = b/h_c$ – безразмерная высота уступа, тогда профиль скорости $u(t, 0, y)$ на входной границе A_1B задается следующим образом:

$$u(t, 0, y) = \begin{cases} (b_1 + 2a - y)(y - b_1)/a^2, & y \in (b_1, b_1 + a], \\ 1, & y \in (b_1 + a, 1 - a), \\ (1 - 2a - y)(y - 1)/a^2, & y \in [1 - a, 1), \end{cases} \quad (7)$$

где a – свободный параметр, который в последующих расчетах брался равным $1/10$. Выбранный профиль предназначен для обеспечения непрерывности функции $u(t, x, y)$ в точках A_1 и B . В противном случае не только отсутствовала сходимость, но и проявлялись паразитические осцилляции за счет разностного дифференцирования по пространству в окрестностях этих точек. Что касается скачка между нулевыми начальными условиями и значениями в (7) при $t > 0$, то используемая монотонная аппроксимация производной по времени приводит к быстрому разглаживанию разрыва со временем.

На неподвижных твердых стенках выполняется условие прилипания $u|_{\Gamma_s} = 0$ и $v|_{\Gamma_s} = 0$, а также условие тепловой изоляции, то есть равенство нулю производной от внутренней энергии по нормали к твердой стенке $\partial e/\partial n|_{\Gamma_s}$, где $\Gamma_s = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$ – твердая граница. На выходе из канала в сечении CD для функций u, v, e принимаются нулевые условия Неймана, для ρ нет необходимости ставить дополнительные условия на выходе.

2. Редукция исходных уравнений

Преобразуем уравнения (1) и (4) к новому виду. Для этого, учитывая неотрицательность плотности и внутренней энергии, введем функции

$$\rho = \sigma^2, \quad (8)$$

$$e = \varepsilon^2. \quad (9)$$

Итак, далее будем решать систему уравнений, преобразованную к следующему виду:

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right) - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \\ & -\frac{P}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Эту систему замыкают алгебраические соотношения для давления и динамического коэффициента вязкости совершенного газа $P = P(\sigma, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\sigma, \varepsilon)$.

Предложенная в работе замена искомых функций в уравнениях неразрывности и внутренней энергии переводит закон сохранения массы и полной энергии из терминов пространства L_1 в термины гильбертова пространства L_2 . Впоследствии это значительно упрощает обоснование устойчивости и сходимости [7].

3. Метод траекторий

В качестве области определения задачи возьмем многоугольник Ω , ограниченный ломаной $BCDEFA_1$ с границей Γ , состоящей из шести сегментов:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x, y) : x \in (0.0, 3.3], y = 1.0\}; \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) : x = 3.3, y \in (0.0, 1.0)\}; \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) : x \in [1.0, 3.3], y = 0.0\}; \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) : x = 1.0, y \in (0.0, 0.25)\}; \\ \Gamma_5 &= \{(x, y) : x \in (0.0, 1.0], y = 0.25\}; \\ \Gamma_6 &= \{(x, y) : x = 0.0, y \in [0.25, 1.0]\}. \end{aligned}$$

В целях упрощения изложения возьмем равномерную квадратную сетку по пространству с координатами $x_i = ih$, $y_j = jh$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, $j = -1, 0, 1, \dots, n_1+1$, с шагом $h = 1/n_1$, целиком укладываемым по горизонтали и вертикали многоугольника Ω . Введенная сетка разбивает расчетную область $\bar{\Omega}$ на квадратные ячейки $\omega_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$. Обозначим множество узлов этой сетки в прямоугольнике $BCDA$ через $S_h = \{s_{i,j} = (x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, n_1\}$ и введем сеточную область $\bar{\Omega}_h = S_h \cap \bar{\Omega}$. Обозначим через $\Omega_h = S_h \cap (\Omega \cup \Gamma_2)$ множество “расчетных узлов”, а через $\Gamma_h^D = \bar{\Omega}_h \cap (\Gamma \setminus \Gamma_2)$ – множество граничных узлов “известных значений” для компонент скорости. Обозначим также два участка сеточной границы как $\Gamma_h^{\text{out}} = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_2$ и $\Gamma_h^{\text{in}} = \bar{\Omega}_h \cap \Gamma_6$.

Для аппроксимации субстанциональных производных по времени в каждом уравнении системы (10)-(13) используем метод траекторий, который заключается в аппроксимации этой производной с помощью разностной производной назад по времени вдоль

траектории, обусловленной уравнением (1) [10]. Для этого введем равномерную сетку по времени с шагом $\tau = t_{\text{fin}}/m$:

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_k : t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, m\}.$$

Для произвольной функции $\varphi(t, x, y)$ мы будем использовать обозначения $\varphi^k(x, y) = \varphi(t_k, x, y)$ и $\varphi_{i,j}^k = \varphi(t_k, x_i, y_j)$.

Итак, субстанциональную производную в уравнении (10) заменим разностной производной с первым порядком аппроксимации [5]:

$$\left. \frac{d\sigma_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \frac{\sigma_{i,j}^{k+1} - \sigma^k(X_i^k, Y_j^k)}{\tau}, \quad (14)$$

где $X_i^k = x(t_k)$, $Y_j^k = y(t_k)$ – координаты траектории в момент времени $t = t_k$, которая при $t = t_{k+1}$ проходит через узел (x_i, y_j) . В принципе, для определения (X_i^k, Y_j^k) необходимо решить обратно по времени следующую задачу об этой траектории на отрезке $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t, x(t), y(t)), \\ \frac{dy}{dt} = v(t, x(t), y(t)), \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_{k+1}) = x_i, \\ y(t_{k+1}) = y_j. \end{cases}$$

Вместо этого реализуем один шаг по времени явной схемы Эйлера (тоже первого порядка аппроксимации). В итоге получаем приближенные значения

$$X_i^k \approx \bar{X}_i^k = x_i - \tau u_{i,j}^k \quad \text{и} \quad Y_j^k \approx \bar{Y}_j^k = y_j - \tau v_{i,j}^k.$$

Ясно, что в общем случае координаты \bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k не попадут в узел сетки. Поэтому значение $\sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ определим путем линейной интерполяции:

$$\begin{aligned} \sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k) &= \sigma_{i,j}^k + \frac{\sigma^k(\bar{x}, y_j) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{x} - x_i} (\bar{X}_i^k - x_i) + \frac{\sigma^k(x_i, \bar{y}) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{y} - y_j} (\bar{Y}_j^k - y_j) = \\ &= \sigma_{i,j}^k - \tau u_{i,j}^k \frac{\sigma^k(\bar{x}, y_j) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{x} - x_i} - \tau v_{i,j}^k \frac{\sigma^k(x_i, \bar{y}) - \sigma_{i,j}^k}{\bar{y} - y_j}, \end{aligned} \quad (15)$$

где \bar{x} и \bar{y} выбираются из соображений монотонности разностной аппроксимации:

$$\bar{x} = \begin{cases} x_{i-1}, & \text{если } u_{i,j}^k \geq 0, \\ x_{i+1} & \text{иначе,} \end{cases} \quad \bar{y} = \begin{cases} y_{j-1}, & \text{если } v_{i,j}^k \geq 0, \\ y_{j+1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В итоге, монотонность (неположительность внедиагональных элементов) выполняется при условии

$$\tau \leq h / (|u_{i,j}^k| + |v_{i,j}^k|) \quad \text{для всех узлов } \bar{\Omega}_h = S_h \cap \bar{\Omega}. \quad (16)$$

Итак, субстанциональные производные в уравнениях (10)-(13) аппроксимируются следующим образом:

$$\left. \frac{d\sigma_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \frac{\sigma_{i,j}^{k+1} - \sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}, \quad (17)$$

$$\rho_{i,j} \left. \frac{du_{i,j}}{dt} \right|_{t_{k+1}} \approx \rho_{i,j}^{k+1} \frac{u_{i,j}^{k+1} - u^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}, \quad (18)$$

$$\rho_{i,j} \frac{dv_{i,j}}{dt} \Big|_{t_{k+1}} = \rho_{i,j}^{k+1} \frac{v_{i,j}^{k+1} - v^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}, \quad (19)$$

$$\rho_{i,j} \frac{d\varepsilon_{i,j}}{dt} \Big|_{t_{k+1}} = \rho_{i,j}^{k+1} \frac{\varepsilon_{i,j}^{k+1} - \varepsilon^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)}{\tau}. \quad (20)$$

Значения $u^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$, $v^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ и $\varepsilon^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$ вычисляются путем линейной интерполяции аналогично формуле (15) для $\sigma^k(\bar{X}_i^k, \bar{Y}_j^k)$.

4. Метод конечных элементов

В принципе, после аппроксимации субстанциональной производной на каждом временном шаге $t = t_{k+1}$, $k = 0, \dots, m-1$, в $\Omega \cup \Gamma_2$ получаются уравнения

$$\frac{\sigma}{\tau} + \frac{1}{2}\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f_1, \quad (21)$$

$$\frac{\rho u}{\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_2, \quad (22)$$

$$\frac{\rho v}{\tau} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + f_3, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \varepsilon}{\tau} - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) \right) - \frac{\gamma}{\text{Pr Re}} \left(\frac{\mu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right) = \\ & f_4 - \frac{P}{2\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2\text{Re}} \frac{\mu}{\varepsilon} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

с правыми частями f_1, f_2, f_3, f_4 , куда вынесены слагаемые, известные с предыдущего временного слоя.

Вообще говоря, в предыдущем разделе в явной форме построены аппроксимации только для узловых точек, а не для всей области $\Omega \cup \Gamma_2$. На самом деле, в методе конечных элементов после использования квадратурных формул нам и не потребуется аппроксимаций в других точках.

Для каждого узла $s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h$ введем базисную функцию

$$\varphi_{i,j}(x, y) = \begin{cases} (1 - |x_i - x|/h)(1 - |y_j - y|/h), & (x, y) \in ([x_{i-1}, x_{i+1}] \times [y_{j-1}, y_{j+1}]) \cap \bar{\Omega}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (25)$$

которая равна единице в $s_{i,j}$ и нулю во всех остальных узлах $\bar{\Omega}_h$. Будем искать приближенное решение в следующем виде:

$$\sigma^h(t, x, y) = \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} \sigma_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), \quad u^h(t, x, y) = \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} u_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y),$$

$$v^h(t, x, y) = \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} v_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y), \quad \varepsilon^h(t, x, y) = \sum_{s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h} \varepsilon_{i,j}(t) \varphi_{i,j}(x, y).$$

Для σ^h , u^h и v^h известны значения на Γ_h^D , а для ε^h известны лишь значения на Γ_h^{in} . Это следует из того, что краевые условия Неймана в отличие от условий Дирихле не ликвидируют степени свободы в соответствующих узлах границы [3].

После стандартного применения метода конечных элементов с тестовыми функциями вида (25) применим квадратурную формулу трапеций для вычисления интегралов на отрезках, а для интегралов на ячейках $\omega_{i,j} = (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ – ее декартово произведение. В итоге во внутренних узлах расчетной области $S_h \cap \Omega$ получается следующий сеточный аналог уравнения неразрывности (далее в этом и следующем разделе у всех функций опущен верхний индекс $k + 1$, характеризующий зависимость от времени):

$$\frac{\sigma_{i,j}}{\tau} + \frac{1}{4h} \sigma_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \frac{1}{4h} \sigma_{i,j} (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) = f_1 \quad \forall s_{i,j} \in S_h \cap \Omega. \quad (26)$$

В приграничных или граничных узлах это и последующие сеточные уравнения для u^h , v^h , ε^h упрощаются за счет краевых условий или за счет меньшего носителя тестовых функций, например, на границе Γ_h^{out} . В итоге получается большое разнообразие таких уравнений, которое мы приводить не будем и ограничимся лишь уравнениями во внутренних узлах, которые дают достаточное представление о виде получаемых сеточных уравнений.

Аналогично применяем метод конечных элементов для уравнений (22)–(24).

Понятно, что в узлах $\bar{\Omega}_h \cap (\Gamma_s \cup \Gamma_2)$ благодаря нулевому условию Неймана это сеточное уравнение упрощается. Эти уравнения дополняются краевыми условиями на Γ_h^{in} из условия невозмущенного потока на входе.

5. Системы алгебраических уравнений

Для решения систем алгебраических уравнений используется многосеточный метод с внешними итерациями по нелинейности. После аппроксимации субстанциональной производной и применения метода конечных элементов с квадратурными формулами на каждом временном слое $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, получаем системы нелинейных алгебраических уравнений.

Для сеточного аналога уравнения переноса массы система алгебраических уравнений относительно неизвестных σ^{k+1} имеет диагональный вид (далее в этом разделе верхний индекс $k + 1$ опущен):

$$\alpha_{\rho}^{i,j} \sigma_{i,j} = F_{\rho}^{i,j} \quad \forall s_{i,j} \in \bar{\Omega}_h, \quad (27)$$

где $\alpha_{\rho}^{i,j}$ означают коэффициенты перед неизвестными, возможно, зависящие от других сеточных функций, а $F_{\rho}^{i,j}$ означают значения, известные с предыдущего временного слоя или из краевых условий. После исключения известных краевых значений уравнение (27) в матричном виде принимает вид

$$A_{\rho}^h \boldsymbol{\sigma}^h = \mathbf{F}_{\rho}^h, \quad (28)$$

где A_{ρ}^h – диагональная матрица, $\boldsymbol{\sigma}^h$ и \mathbf{F}_{ρ}^h – векторы неизвестных и правой части размерности множества Ω_h .

Сеточные аналоги уравнений количества движения в терминах неизвестных значений u^{k+1} и v^{k+1} в узлах сетки Ω_h могут быть представлены в следующем виде:

$$\alpha_u^{i-1,j} u_{i-1,j} + \alpha_u^{i,j-1} u_{i,j-1} + \alpha_u^{i,j} u_{i,j} + \alpha_u^{i,j+1} u_{i,j+1} + \alpha_u^{i+1,j} u_{i+1,j} +$$

$$\beta_u^{i-1,j-1}v_{i-1,j-1}^{k+1} + \beta_u^{i-1,j+1}v_{i-1,j+1}^{k+1} + \beta_u^{i+1,j-1}v_{i+1,j-1}^{k+1} + \beta_u^{i+1,j+1}v_{i+1,j+1}^{k+1} = F_u^{i,j}, \quad (29)$$

$$\alpha_v^{i-1,j}v_{i-1,j}^{k+1} + \alpha_v^{i,j-1}v_{i,j-1}^{k+1} + \alpha_v^{i,j}v_{i,j}^{k+1} + \alpha_v^{i,j+1}v_{i,j+1}^{k+1} + \alpha_v^{i+1,j}v_{i+1,j}^{k+1} +$$

$$\beta_v^{i-1,j-1}u_{i-1,j-1}^{k+1} + \beta_v^{i-1,j+1}u_{i-1,j+1}^{k+1} + \beta_v^{i+1,j-1}u_{i+1,j-1}^{k+1} + \beta_v^{i+1,j+1}u_{i+1,j+1}^{k+1} = F_v^{i,j}, \quad (30)$$

$$\forall s_{i,j} \in \Omega_h.$$

Здесь α и β с разными индексами – коэффициенты при неизвестных, равные нулю вне сеточной области $\bar{\Omega}_h$ и зависящие нелинейным образом от других неизвестных систем (28)–(30).

Для решения систем линейных алгебраических уравнений на каждом временном слое использовался точечный метод Якоби. Сходимость этого метода и итераций по нелинейности значительно ускоряется при использовании в качестве начального приближения квадратичной экстраполяции значений по времени с двух временных слоев вместо простого переноса значений с предыдущего слоя. Ввиду существенного диагонального преобладания среднее количество итераций, необходимое для сходимости метода Якоби на сетке 1001×101 узлов, составляло не более 10.

6. Расчет течения газа в канале с различными числами Маха и Рейнольдса

Приведенный алгоритм реализован для сформулированной выше задачи течения газа при сверхзвуковой скорости на входе. В качестве уравнений (5) в расчетах использованы уравнения состояния совершенного газа

$$P = (\gamma - 1)\rho e, \quad T = \gamma(\gamma - 1)M^2 e,$$

зависимость динамического коэффициента вязкости газа представляется формулой Саузерленда: $\mu = T^\omega$. Различные модификации этих уравнений и условия их применения можно найти в [10].

Расчеты выполнялись на сетке, содержащей 1001×101 узлов, шаг по пространству $h = 0.01$, шаг по времени $\tau = 0.001$. Газодинамическая постоянная γ , число Рейнольдса Re , число Прандтля Pr , число Маха M и ω имели следующие значения: $\gamma = 1.4$, $Re = 2 \times 10^3, 10^4$, $Pr = 0.72$, $M = 2, 4$, $\omega = 0.8$.

На рис. 2 приведена картина течения в канале для числа Маха $M = 2$ и Рейнольдса $Re = 2 \times 10^3$.

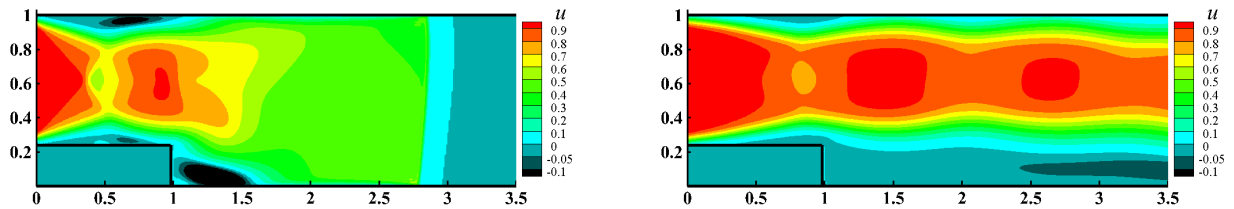


Рис. 2. Продольная составляющая скорости для моментов времени $t = 4$ и $t = 50$

Слева на рис. 2 представлена компонента скорости u в момент времени $t = 4$, справа – в момент времени $t = 50$. За уступом идет формирование вихря с отрицательными значениями скорости. С течением времени вихревая зона увеличивается в направлении потока и за уступом формируется течение со скоростью, близкой к нулевым значениям.

Следует отметить, что за характерный размер L принята ширина канала, в данном случае длина канала при расчетах равнялась $10L$, чтобы точка "примыкания" основного потока к донному течению оставалась в пределах расчетной области [11].

Заключение

В заключение отметим, что замена искомых функций в уравнениях сохранения массы и внутренней энергии привела к меньшей абсолютной погрешности в нормах L_2 и L_∞ , что и раньше было отмечено в одномерном случае [6]. Полезно отметить, что применение комбинации метода траекторий и метода конечных элементов не требует согласования триангуляций на соседних временных слоях. Это значительно облегчает динамическое разрежение или сгущение триангуляций по времени для оптимизации вычислительной работы или улучшения аппроксимации в пограничных слоях и ударных волнах. Для решения систем алгебраических уравнений ввиду значительного диагонального преобладания использовался метод Якоби в комбинации с внешними итерациями по нелинейности. Совокупность метода траекторий и метода конечных элементов позволила построить вычислительно устойчивый и экономичный алгоритм.

Список литературы

- [1] *Bosnyakov S., Kursakov I., Lysenkov A., Matyash S., Mikhailov S., Vlasenko V., Quest J.* Computational tools for supporting the testing of civil aircraft configurations in wind tunnels. *Progress in Aerospace Sciences*. 2008. 44. P. 67–120.
- [2] *Ковеня В.М., Слюняев А.Ю.* Моделирование сверхзвуковых течений газа в канале // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. Спец. вып. 4. С. 32–41.
- [3] *Rannacher R.* Methods for Numerical Flow Simulation. Institute of Applied Mathematics, University of Heidelberg, Germany. 2007. P. 1–58.
- [4] *Oberkampf W.L., Trucano T.G.* Verification and validation in computational fluid dynamics // *Progress in Aerospace Sciences*. 38. P. 209–272.
- [5] *Pironneau O.* On the Transport-Diffusion Algorithm and Its Applications to the Navier-Stokes Equations // *Numerische Mathematik*. 1982. 38. P. 309–332.
- [6] *Шайдуров В.В., Щепановская Г.И., Якубович М.В.* Применение метода траекторий и метода конечных элементов в моделировании движения вязкого теплопроводного газа // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12. С. 275–281.
- [7] *Ушакова О.А., Шайдуров В.В., Щепановская Г.И.* Метод конечных элементов для уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат // Вестник КрасГУ. 2006. № 4. 151–156.
- [8] *Vos J.B., Rizzi A., Darracq D., Hirschel E.H.* Navier-Stokes solvers in European aircraft design. *Progress in Aerospace Sciences*. 2002. 38. P. 601–697.
- [9] ADIGMA - A European Initiative on the Development of Adaptive Higher-Order Variational Methods for Aerospace Applications, Vol. 113 of Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design. Springer. 2010. P. 339–353.
- [10] *The Handbook of Fluid Dynamics. Ed. R. W. Johnson.* CRC Press LLC & Springer. 1998.
- [11] *Башкин В.А., Егоров И.В., Иванов Д.В.* Торможение сверхзвукового потока в плоских и осесимметричных каналах // Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 143–152.